# ELEMENTI
## DI MECCANICA
## E
## D' IDRAULICA

DI

GIUSEPPE VENTUROLI

PROFESSORE DI MATEMATICA APPLICATA

*Nella R. Università di Bologna.*

*SECONDA EDIZIONE*

VOLUME TERZO.

BOLOGNA 1810.

Tipografia de' Fratelli Masi, e Comp.

*Stampato sotto la protezione della Legge.*
*19. Fiorile Anno IX.*

# SUPPLEMENTO
## AGLI ELEMENTI DI MECCANICA E D' IDRAULICA.

## SEZIONE PRIMA
### De' Principj della Statica.

### CAP. I.
#### *Principio delle velocità virtuali.*

1. Al punto *A* ( Fig. 1 ) sia applicata una forza *S*, la quale agisca per la retta *A B*. Immagino che il punto *A* trascorra in un altro punto *a* vicinissimo ad *A*. Condotta per *a* la perpendicolare *a b* sopra *A B*, sarà *A b* lo spazietto percorso dal punto *A* secondo la retta *A B*, che è la direzione della forza *S*. Questo spazietto *A b* si dirà la *Velocità virtuale* della forza *S*.

Adunque per velocità virtuale d'una forza intendiamo lo spazietto che per un dato moto minimo descrive il punto d'applicazione della forza secondo la direzione della forza medesima.

2. Il prodotto $S . Ab$, o sia il prodotto della forza $S$ per la sua velocità virtuale, si dirà il *Momento* della forza $S$.

Si adottano queste denominazioni per abbreviare il discorso. Del resto conviene bene guardarsi dallo scambiare questo Momento colle altre diverse quantità che abbiamo altrove ( I. 49. 93 ) sotto lo stesso nome disegnate.

3. *Proposizione I.* Concorrendo più forze in un punto, il momento della risultante è uguale alla somma de' momenti delle componenti.

Concorrano nel punto $A$ le forze $S$, $S'$, $S''$ etc. agenti secondo le rette $AB = s$, $AC = s'$, $AD = s''$ etc. e sia la loro risultante $V$ agente secondo la retta $AR = u$. Riferito questo sistema a tre assi ortogonali, siano $x$, $y$, $z$ le coordinate del punto $A$. Immagino che questo punto $A$ trascorra in $a$, percorrendo secondo le tre coordinate gli spazietti $dx$, $dy$, $dz$. Considerando le rette $s$, $s'$, $s''$.... $u$ siccome funzioni di $x$, $y$, $z$, si vede che gli spazietti $Ab$, $Ac$, $Ad$.... $Ar$ percorsi dal punto $A$ secondo le rette $s$, $s'$, $s''$.... $u$, saranno rispettivamente $ds$, $ds'$ $ds''$.... $du$. E i momenti delle forze saranno $Sds$, $S'ds'$, $S''ds''$.... $Vdu$. Ora io dico che sarà

$$V du = S ds + S' ds' + S'' ds'' \dots$$

Dim. Siano $a$, $b$, $c$ le coordinate del punto $B$. Sarà

$$AB = s = \sqrt{\left((x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\right)};\ \text{onde}$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)=\frac{x-a}{s};\ \left(\frac{ds}{dy}\right)=\frac{y-b}{s};\ \left(\frac{ds}{dz}\right)=\frac{z-c}{s}.$$

Ora si risolva la forza $S$ in tre forze parallele alle tre coordinate $x$, $y$, $z$. Qneste saranno $S.\frac{x-a}{s}$; $S.\frac{y-b}{s}$; $S.\frac{z-c}{s}$; o sia $S\left(\frac{ds}{dx}\right)$; $S\left(\frac{ds}{dy}\right)$; $S\left(\frac{ds}{dz}\right)$. Facciasi la stessa risoluzione per le altre forze $S'$, $S''$ etc. ed anche per la forza $V$, la quale similmente verrà decomposta nelle tre $V\left(\frac{du}{dx}\right)$; $V\left(\frac{du}{dy}\right)$; $V\left(\frac{du}{dz}\right)$. Ed avremo (I. 30) le equazioni

$$V\left(\frac{du}{dx}\right)=S\left(\frac{ds}{dx}\right)+S'\left(\frac{ds'}{dx}\right)+S''\left(\frac{ds''}{dx}\right)\ldots$$

$$V\left(\frac{du}{dy}\right)=S\left(\frac{ds}{dy}\right)+S'\left(\frac{ds'}{dy}\right)+S''\left(\frac{ds''}{dy}\right)\ldots$$

$$V\left(\frac{du}{dz}\right)=S\left(\frac{ds}{dz}\right)+S'\left(\frac{ds'}{dz}\right)+S''\left(\frac{ds''}{dz}\right)\ldots$$

le quali moltiplicate rispettivamente per

$dx$, $dy$, $dz$, e poi sommate, rendono appunto

$$V\,du = S\,ds + S'\,ds' + S''\,ds'' \ldots.$$

4. *Scolio I.* La proposizione è vera, quand' anche il punto $A$ venendo in $a$ trascorresse uno spazio finito. Imperocchè descrivendo il punto $A$ secondo $x$, $y$, $z$ gli spazj finiti $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$, le mutazioni della retta $s$ corrispondenti a questi tre spazj saranno $\frac{x-a}{s}.\Delta x$; $\frac{y-b}{s}.\Delta y$; $\frac{z-c}{s}.\Delta z$; onde

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)=\frac{x-a}{s};\ \left(\frac{\Delta s}{\Delta y}\right)=\frac{y-b}{s};\ \left(\frac{\Delta s}{\Delta z}\right)=\frac{z-c}{s}.$$

Dal che avremo nello stesso modo di prima

$$V\Delta u = S\Delta s + S'\Delta s' + S''\Delta s'' \ldots.$$

5. *Scolio II.* Anche dalle più semplici nozioni elementari si poteva trarre la prova della Proposizione precedente. Siano le due forze (Fig. 2) $AB = S$, $AC = S'$, e la loro risultante $AR = V$, che sarà la diagonale del parallelogrammo $ABRC$. Dicasi l'angolo $BAR = \alpha$, l'angolo $CAR = \beta$, l'angolo $RAa = \epsilon$. Condotte le normali $BM$, $CN$ sopra la diagonale $AR$, sarà per le note proprietà del parallelogrammo, $AR = AM + AN$, e $BM = CN$; o sia

$$V = S\cos.\alpha + S'\cos.\beta$$
$$S\sin.\alpha = S'\sin.\beta$$

Si moltiplichi la prima equazione per $\cos.\epsilon$,

la seconda per sin. $\epsilon$; e sommandole avremo

$$V \cos.\epsilon = S \cos.(\alpha+\epsilon) + S'(\beta-\epsilon).$$

Ora condotte dal punto $a$ le normali $ab$, $ac$, $ar$ sarà

$$\cos.\epsilon = \frac{Ar}{Aa};\ \cos.(\alpha+\epsilon) = \frac{Ab}{Aa};\ \cos.(\beta-\epsilon) = \frac{Ac}{Aa}.$$

Dunque $V.Ar = S.Ab + S'.Ac$.

Così sommando i momenti di due forze, si ha il momento della loro risultante. E se le forze sono più di due, sommando il momento della risultante delle prime due col momento della terza, si avrà similmente il il momento della risultante delle tre forze, il quale per conseguenza sarà eguale alla somma dei momenti di esse. E così si procederà per quante siano le forze.

6. *Scolio III.* Se lo spazio trascorso dal punto $A$ sulla direzione d'alcuna delle forze non fosse per lo stesso verso per cui tende la forza ma in senso contrario, il momento di quella forza andrebbe preso negativamente. Così nel parallelogrammo della Fig. 3 sarà $V.Ar = S.Ab - S'.Ac$.

7. *Proposizione II.* Se più forze concorrenti in un punto libero $A$ si fanno equilibrio, sarà la somma de' loro momenti eguale a zero; e viceversa.

Poichè se v'è equilibrio, sarà la risultante $V = 0$; onde avremo (3) l'equazione

$$0 = S\,ds + S'\,ds' + S''\,ds''\ldots.$$

E viceversa se questa equazione ha luogo, sarà (3) $V\,d\,u = o$. E perchè non può essere $d\,u = o$ per un moto qualunque del punto $A$, converrà che sia $V = o$; onde saravvi equilibrio.

8. *Scolio I.* Se il punto $A$ sospinto dalle forze $S$, $S'$, $S''$.... contro una linea o superficie resistente, sta in equilibrio sopra di essa; dicasi $K$ la pressione che esso esercita contro quella linea o superficie. Questa pressione agirà senza dubbio secondo una retta $k$ perpendicolare ad essa linea o superficie: poichè se agisse obbliquamente, potrebbe risolversi in due, l' una normale, l' altra tangenziale, e con quest' ultima non premerebbe, il che è contro l' ipotesi. Ciò posto s' intenda rimossa quella resistenza, ed in suo luogo sostituita una forza $-K$ agente secondo la retta $k$. È palese che l'equilibrio sussisterà; ed essendo ora il punto $A$ affatto libero, invece dell' equazione dell' articolo precedente avremo quest' altra

$$o = S\,d\,s + S'\,d\,s' + S''\,d\,s'' \ldots\ldots - K\,d\,k.$$

9. *Scolio II.* Per altro anche in questo caso troverà luogo l' equazione dell'art. 7 quando si supponga che il punto $A$ trapassando nel punto prossimo $a$ movasi sulla linea o superficie anzidetta. Poichè allora lo spazietto $A\,a$ sarà una retta infinitesima perpendicolare alla retta $k$; onde il punto $A$

non s'avanza sulla medesima retta $k$. Quindi $dk = 0$, e torna l'equazione

$$0 = S\,ds + S'\,ds' + S''\,ds'' \ldots.$$

10. *Proposizione III.* Sia un sistema de' punti $A$, $B$, $C$ ec. animati dalle forze $S$, $S'$, $S''$ etc. Sia questo sistema perfettamente libero, ed in equilibrio. Dico che la somma de' momenti delle forze sarà eguale a zero.

Dim. Siano (Fig. 4) i tre punti $A$, $B$, $C$ animati dalle forze $AP = S$, $BQ = S'$, $CR = S''$. Uniti questi tre punti colle rette $AB$, $AC$, $BC$, sia $AB = f$, $AC = f'$, $BC = f''$. Dicasi $p$ l'azione che il punto $B$ esercita sul punto $A$, in virtù della connessione delle parti del sistema; la quale azione sarà diretta per $AB$, e sarà eguale e contraria a quella che il punto $A$ esercita sopra il punto $B$: o in altri termini, sia $p$ la tensione della retta $AB$. E similmente sia $p'$ la tensione della retta $AC$, e $p''$ la tensione della retta $BC$.

Egli è chiaro che nel punto $A$ agiscono le tre forze $S$, $p$, $p'$ che debbono equilibrarsi fra loro, indipendentemente dal resto del sistema: poichè tutto il resto del sistema non agisce sopra $A$, se non appunto per mezzo delle due forze $p$, $p'$. E similmente nel punto $B$ si equilibrano fra loro le tre forze $S'$, $p$, $p''$; e nel punto $C$ le tre forze $S''$, $p'$, $p''$.

Ora dato al sistema un moto minimo quale il permette la connessione delle parti del sistema stesso, trascorra il punto $A$ secondo la retta $AP$ lo spazietto $ds$, secondo $AB$ lo spazietto $df$, secondo $AC$ lo spazietto $df'$. Ed il punto $B$ trascorra secondo le rette $BQ$, $BA$, $BC$ gli spazietti $ds'$, $d\Phi$, $df''$. E finalmente il punto $C$ trascorra secondo $CR$, $CA$, $CB$ gli spazietti $ds''$, $d\Phi'$, $d\Phi''$. Avremo (7) le tre equazioni

$$o = S\,ds + p\,df + p'\,df'$$

$$o = S'\,ds' + p\,d\Phi + p''\,df''$$

$$o = S''\,ds'' + p'\,d\Phi' + p''\,d\Phi''$$

sommando le quali avremo per l' equilibrio di tutto il sistema l' equazione

$$o = S\,ds + S'\,ds' + S''\,ds''$$

$$+ p(df + d\Phi) + p'(df' + d\Phi') + p''(df'' + d\Phi'')$$

Ma l' equilibrio del sistema sussisterà nè più nè meno, se intendiamo che siano soppresse le forze $S$, $S'$, $S''$, e che i punti $A$, $B$, $C$ siano tenuti fermi dalle sole tensioni $p$, $p'$, $p''$ rivolte in senso contrario. Dunque l' equazione precedente deve tuttavia sussistere, fatto $S = S' = S'' = o$, e cangiato il segno delle forze $p$, $p'$, $p''$. Varrà dunque l' equazione

$$o = -p(df + d\Phi) - p'(df' + d\Phi') - p''(df'' + d\Phi'')$$

che sommata colla precedente lascia

$$o = S\,ds + S'\,ds' + S''\,ds''$$

Intendesi agevolmente come questa dimostrazione si estenda a qualsivoglia numero de' punti componenti il sistema.

11. *Scolio I.* La dimostrazione si applica egualmente a' sistemi rigidi, e a quelli di forma variabile. Ma per i primi si potrebbe conchiudere anche nel modo seguente. La verga rigida $AB$ non può spostarsi se non per moto composto di moto progressivo, e di moto rotatorio. Ora per un moto progressivo qualunque della retta $AB$, è chiaro che i due termini $A$, $B$ si avanzano egualmente e per lo stesso verso secondo $AB$: e per un moto rotatorio minimo, è pure chiaro, che siccome entrambi i punti $A$, $B$ descrivono rette infinitesime perpendicolari alla $AB$, così nissuno di essi si avanza secondo la stessa $AB$. Adunque dato al sistema un moto minimo, gli spazietti percorsi dai due punti $A$, $B$ sulla direzione della forza $p$ debbono necessariamente essere uguali, e rivolti per lo stesso verso. Siccome poi quella forza $p$ agisce ne' due punti $A$, $B$ con direzioni opposte fra loro, così l'uno di questi spazietti sarà necessariamente percorso secondo la direzione della forza $p$, e l'altro contro la direzione di essa forza. Dunque sarà ne' sistemi rigidi $d\Phi = -df$. E similmente si troverà $d\Phi' = -df'$, e $d\Phi'' = -df''$. Onde l'e-

quazione dell' articolo precedente si riduce tosto ad essere

$$o = S\,d\,s + S'\,d\,s + S''\,d\,s'' \ldots$$

12. *Scolio II.* Se fosse nel sistema alcun punto fisso, sia $H$ la pressione che questo sostiene, e sia la sua direzione una retta $h$. Sussisterà l' equilibrio, anche rimosso quel fulcro, se in sua vece s' intenda applicata quivi al sistema una forza $- H$ diretta secondo $h$. Sarà allora come se il sistema fosse libero, ed avrà luogo l' equazione

$$o = S\,d\,s + S'\,d\,s' + S''\,d\,s'' \ldots - H\,d\,h$$

13. *Scolio III.* Similmente se fosse nel sistema alcun punto appoggiato e sospinto contro una superficie resistente, sia $K$ la pressione che ne risente la superficie, diretta secondo la normale $k$. E l' equilibrio non si turberà, se si rimova quella resistenza, ed invece si aggiunga al sistema la forza $- K$ agente secondo $k$: con questo l' equazione diventerà

$$o = S d s + S' d s' + S'' d s'' \ldots - K d k$$

14. *Scolio IV.* Quel moto minimo che si suppone concepire il sistema, e da cui si misurano le velocità virtuali e i momenti delle forze, fingiamo che sia non un moto qualunque, ma quale il permettono gli ostacoli che trattengono il sistema. In questo caso dovremo intendere che i punti fissi restino fermi; onde sarà $d\,h = o$. E similmen-

te dovremo intendere che i punti sospinti contro una linea o superficie resistente si movano su quella, descrivendo una retta infinitesima che sarà perpendicolare alla $k$; onde sarà $dk = 0$. In tale ipotesi adunque si ottiene di bel nuovo l'equazione

$$0 = S\,ds + S'\,ds + S''\,ds'' \ldots$$

come pei sistemi liberi.

15. *Scolio V.* Adunque in un sistema equilibrato, la somma de' momenti delle forze si troverà eguale a zero per ogni moto minimo conciliabile colla costituzione, e colle condizioni particolari del sistema. E si troverà ancora eguale a zero per un moto minimo qualunque, purchè tra le forze applicate al sistema si contino anche le reazioni o resistenze degli ostacoli che lo trattengono.

16. *Proposizione IV.* Viceversa se la somma de' momenti delle forze applicate al sistema è uguale a zero, sarà quel sistema in equilibrio.

Dim. Sia il sistema de' punti $A$, $B$, $C$ etc. animati dalle forze $S$, $S'$, $S''$ etc. e sia la somma de' loro momenti eguale a zero. Se il sistema non è in equilibrio, prendano dunque i punti $A$, $B$, $C$ etc. le velocità $v$, $v'$, $v''$ etc. per cui nell' istante $dt$ percorrano gli spazietti $v\,dt$, $v'dt$, $v''dt$ etc. Ora se ai punti $A$, $B$, $C$ etc. già investiti delle forze $S$, $S'$, $S''$ etc. aggiungiamo le

forze $-v$, $-v'$, $-v''$ etc. le quali distruggano ne' suddetti punti quelle velocità iniziali $v$, $v'$, $v''$ etc. egli è evidente che coll' aggiunta di queste nuove forze il sistema adesso sarà in equilibrio. Essendo adunque i momenti di queste nuove forze $-v^2\,dt$, $-v'^2\,dt$, $-v''^2\,dt$ etc. avremo (10)

$$0 = S\,ds + S'\,ds' + S''\,ds''\ldots.$$
$$-v^2\,dt - v'^2\,dt - v''^2\,dt\ldots.$$

Ma già per ipotesi è

$$0 = S\,ds + S'\,ds' + S''\,ds''\ldots.$$

Dunque sarà ancora $0 = v^2 + v'^2 + v''^2\ldots.$ la qual equazione non può verificarsi quando non sia $v = 0$, $v^{2\prime} = 0$, $v^{2\prime\prime} = 0$ etc. Quando dunque la somma de' momenti delle forze è uguale a zero, i punti $A$, $B$, $C$ etc. non ponno concepire moto veruno, ed è il sistema in equilibrio.

## CAP. II.

### *Teoremi Statici dedotti dal principio delle velocità virtuali.*

17. PROPOSIZIONE I. Nella Leva retta due pesi reciprocamente proporzionali alle loro distanze dal fulcro, si fanno equilibrio.

Questa Proposizione sulla quale si appoggia tutta la Teoria delle Macchine, e che

perciò viene annoverata tra i principj della Statica, si deduce immediatamente dal principio delle velocità virtuali. Supposta una rotazione minima della leva *AFB* (Fig. 5) attorno al fulcro *F*, per cui ella passi in *CFD*, e condotte le orizzontali *Ca*, *Db*, è palese che le velocità virtuali *Aa*; *Bb* dei due pesi *P*, *Q* sono proporzionali alle distanze *AF*, *BF*. Ora pel principio delle velocità virtuali dev'essere (10) $P.Aa - Q.Bb = o$. Dunque $P : Q :: Bb : Aa :: BF : AF$.

Con eguale facilità nella Leva inflessa *AFB* (Fig. 6) si troverebbe $Aa : Bb :: MF : NF$, e quindi per l'equilibrio dover essere $P : Q :: NF : MF$.

18. *Scolio I.* Questa legge dell'equilibrio nella Leva può tuttavia dimostrarsi immediatamente senza derivarla nè dal principio della velocità virtuali, nè da quello della composizione delle forze.

Sia la leva *XZ* (Fig. 7) divisa per metà dal fulcro *F*, e carica di pesi uniformemente distribuiti per tutta la sua lunghezza. È evidente che questa sarà in equilibrio.

Ora preso nella Leva un punto qualunque *L*, tutti i pesi uniformemente distribuiti sulla porzione *XL* si riuniscano in un solo peso *P* posto in *A*, punto di mezzo della *XL*. E similmente tutti i pesi uniformemente distribuiti sopra la *LZ* si raccolgano

in un solo peso $Q$ posto in $B$, punto di mezzo della $LZ$. È pure chiaro, che l'equilibrio sussisterà.

Sarà dunque $P : Q :: XL : LZ$. Ma abbiamo

$$XL = XZ - LZ = 2FZ - 2BZ = 2BF$$
$$LZ = XZ - LX = 2FX - 2AX = 2AF$$

Dunque $P : Q :: BF : AF$. Il che etc.

19. *Scolio II.* Alcuni oppongono a questa dimostrazione, che l'equipollenza di più pesi uniformemente compartiti sopra una linea, ad un peso solo eguale alla loro somma e posto nel punto di mezzo della medesima, non è assunto così evidente che non abbia d'uopo di dimostrazione esso pure. Tuttavia è facile il convincersi (*a*) che il peso $Q$ posto in $B$ equivale per esempio a due pesi $q$, $q$, ciascuno la metà di $Q$, posti ne' punti $L$, $Z$ equidistanti da $B$. Poichè si prenda $Zf = ZF$, ed immaginando che in $f$ siavi un altro appoggio, egli è evidente che o sia in $B$ il peso $Q$, o siano in $L$, $Z$ i pesi $q$, $q$, in amendue i casi quest'appoggio $f$ porterà la metà del peso $Q$. Laonde rimosso quest'appoggio si richiederà in $f$ la stessa forza per equilibrare il peso $Q$, che per equilibrare i due pesi $q$, $q$. Onde etc.

20. *Proposizione II.* Sia un sistema di pesi in equilibrio; dato al sistema un moto

(a) *Vince Phil. Transact.* 1794.

minimo qualunque, il centro di gravità del sistema non s' alza, nè s' abbassa.

Dim. Siano i pesi $S$, $S'$, $S''$ etc. e siano $s$, $s'$, $s''$ etc. le verticali condotte dal centro di gravità di ciascun peso, e terminate ad un piano orizzontale qualunque. Sia $Z$ l' altezza del centro di gravità del sistema sopra questo piano; e sarà (I. 46)

$$Z = \frac{Ss + S's' + S''s'' \ldots}{S + S' + S'' \ldots}$$

Ora s' imprima al sistema un moto minimo per cui le verticali $s$, $s'$, $s''$ etc. divengano $s + ds$, $s' + ds'$, $s'' + ds''$ etc. e $Z$ diventi $Z + dZ$. Sarà

$$dZ = \frac{Sds + S'ds' + S''ds'' \ldots}{S + S' + S'' \ldots}$$

Ma per ipotesi il sistema è in equilibrio dunque (10) $Sds + S'ds' + S''ds'' \ldots = 0$: dunque $dZ = 0$, e l' altezza $Z$ è costante.

21. *Coroll. I.* E viceversa se un sistema di pesi sarà talmente disposto che per un moto minimo qualunque il suo centro di gravità non s' alzi nè s' abbassi, quel sistema sarà in equilibrio.

Fu questo Teorema proposto da Torricelli, che ne dedusse la legge dell' equilibrio di due pesi nel piano inclinato; e si può egualmente ritrarne la legge dell' equilibrio

in tutte le altre macchine nelle quali più pesi si equilibran fra loro.

22. *Coroll. II.* Essendo $d\,Z = 0$, sarà generalmente parlando $Z$ un massimo, o un minimo. Dal che si deduce che in un sistema equilibrato di pesi, l'altezza del centro di gravità sopra l'orizzonte è la massima o la minima di quelle che avrebbon luogo se il sistema perdesse la situazion d'equilibrio, da qualunque parte esso piegasse.

Se quell'altezza è un minimo, il centro di gravità occupa il sito più basso; e turbato il sistema in qualunque modo, il centro di gravità viene ad alzarsi. Cessando la cagione perturbatrice, questo centro tornerà a discendere, e però il sistema si ricomporrà nella situazione d'equilibrio. Così avviene in una bilancia, nella quale il centro di gravità cada al di sotto del centro del moto.

Se poi quell'altezza è un massimo, il centro di gravità stà nel sito più alto, e da qualunque parte crolli il sistema, esso centro viene ad abbassarsi. Cessando la cagione perturbatrice, il centro discenderà tuttavia, ed il sistema si allontanerà sempre più dalla situazione d'equilibrio. Così trabocca una bilancia nella quale il centro di gravità sia posto al di sopra del centro del moto.

23. *Proposizione III.* Sia un sistema di punti sollecitati per le rette $s$, $s'$, $s''$, etc. dalle forze $S$, $S'$, $S''$ etc. tali che la funzione $S\,ds + S'\,ds' + S''\,ds''$ ec. sia una differenziale esatta $= d\Phi$. Se il sistema è in equilibrio, sarà la funzione $\Phi$ un massimo o un minimo; e viceversa.

Ancor questo Teorema proposto da Maupertuis è una conseguenza immediata del principio delle velocità virtuali. Poichè se v' ha equilibrio, dovrà essere (10) $d\Phi = 0$, onde $\Phi$ un massimo o un minimo: e viceversa.

Che anzi la proposizione inversa è sempre e generalmente vera: la diretta è soggetta a qualche eccezione, potendo darsi caso che sia $d\Phi = 0$, e tuttavia la funzione $\Phi$ non sia nè massima nè minima.

24. *Scolio.* Le forze agenti nella natura sono sempre tali che la funzione $S\,ds + S'\,ds' + S''\,ds''$ etc. è una differenziale esatta, ed ha luogo il Teorema precedente. Poichè queste forze o sono costanti, ed indipendenti dalla situazione de' punti ai quali si applicano, o sono attrazioni dirette ad un centro, e funzioni delle distanze che separano il punto sul quale agisce la forza da questo centro; cosicchè prendendo queste distanze medesime per le rette $s$, $s'$, $s''$ etc.

saranno le forze $S$, $S'$, $S''$ etc. o costanti, o funzioni di $s$, $s'$, $s''$ etc. rispettivamente. In entrambi i casi è manifesto che la formola $S\,ds + S'ds' + S''ds''$ etc. riesce una differenziale esatta $= d\Phi$.

## CAP. III.

### *Dell' equilibrio d' un punto.*

25. PASSIAMO ora a dichiarare dietro la scorta del Ch. Sig. la Grange l'uso del principio delle velocità virtuali nella risoluzione de' Problemi Statici. Nel che prima di scendere a' casi particolari fia bene segnare generalmente le tracce da seguirsi. Sia dunque un sistema de' punti $A$, $B$, $C$ etc. sollecitati dalle forze $S$, $S'$, $S''$ etc. Riferito questo sistema a tre assi ortogonali, siano $x$, $y$, $z$; $x'$, $y'$, $z'$; $x''$, $y''$, $z''$, etc. le coordinate de' punti $A$, $B$, $C$ etc. Ciascuna forza come $S$ si risolva nelle tre $P$, $Q$, $R$ dirette secondo le $x$, $y$, $z$; e così la forza $S'$ nelle tre $P'$, $Q'$, $R'$ etc. Eguagliando a zero la somma de' momenti (10) avremo per l'equazion general dell'equilibrio

$$(A)\quad 0 = P\,dx + P'dx' + P''dx'' \ldots + Q\,dy + Q'dy' + Q''dy'' \ldots + R\,dz + R'dz' + R''dz'' \ldots$$

26. Se tutti i punti $A$, $B$, $C$ etc. del sistema fossero liberi, e fra loro sconnessi, così che ogni punto potesse cangiar luogo indipendemente dagli altri, le variazioni delle coordinate $dx$, $dy$, $dz$, $dx'$ ec. sarebbero tutte arbitrarie ed indipendenti fra loro, e dovrebbe l'equazione ($A$) verificarsi qualunque valore si attribuisse a codeste variazioni. Quindi bisognerebbe porre eguali a zero i loro coefficienti, e si avrebbero le equazioni $P=0$, $Q=0$, $R=0$, $P'=0$ ec. tre volte tante quanti sono i punti componenti il sistema.

27. Ma se quei punti sono ritenuti o da ostacoli esterni, o da spranghe che li congiungano fra loro, o in tutt' altra guisa, per modo che determinato ad arbitrio il moto d'alcuni di quei punti, gli altri siano obbligati a seguirli scorrendo per date linee; le variazioni $dx$, $dy$, $dz$, $dx'$ ec. non sono più allora arbitrarie, ma dipendono dalla costituzione e dalle condizioni particolari del sistema. Conviene allora esprimere queste condizioni con equazioni atte ad esprimere i rapporti che debbon passare tra le variazioni delle coordinate. Per mezzo di queste equazioni si elimineranno dall' equazione ($A$) altrettante di queste variazioni $dx$, $dy$ ec. Quelle che restano, saranno adesso arbitrarie e indipendenti fra loro.

Si pongano eguali a zero i loro coefficienti; e si avranno le equazioni che rappresentano l'equilibrio del particolare sistema proposto.

28. A queste equazioni si può pervenire anche col metodo seguente. L'equilibrio del sistema deve sussistere anche se s'intendano tolti via gli ostacoli che fermano i punti del sistema, le spranghe che li legano ecc. purchè a' quei punti s'intendano applicate delle forze eguali e contrarie alle azioni che il sistema esercitava contro quegli ostacoli. S'intendano adunque ai punti $A$, $B$, $C$ ec. oltre le forze $S$, $S'$, $S''$ etc. applicate le forze $-p$, $-q$, $-r$ ec. esprimenti le reazioni degli ostacoli che trattengono il sistema, e nell'equazione ($A$) si comprendano anche i momenti di queste forze. Sarà allora come se tutti i punti del sistema fossero liberi; tutte le variazioni $dx$, $dy$, $dz$, ec. tornano arbitrarie; e posti eguali a zero i loro coefficienti, forniranno altrettante equazioni. Da queste poi dovranno eliminarsi le quantità $p$, $q$, $r$ ec. e le equazioni che rimangono saranno desse che esprimono l'equilibrio del proposto sistema.

Questo secondo metodo ha un vantaggio sopra del primo, poichè oltre le condizioni dell'equilibrio ne dà a conoscere i valori di $p$, $q$, $r$ ec. o sia delle azioni che il sistema esercita contro gli ostacoli; come so-

no le pressioni de' fulcri, le tensioni delle spranghe o delle funi etc.

29. Di questi due metodi si potrà scegliere ne' particolari Problemi quello che porga maggiore facilità. E gioverà molto l' industria nello esprimere le condizioni del sistema colle equazioni più acconcie a potersi combinare coll' equazione ($A$) ed agevolare l' eliminazione delle indeterminate. Il che meglio apparirà negli esempj.

30. *Proposizione I.* Determinare le condizioni d' equilibrio d' un punto libero.

L' equazione ($A$) diventa in questo caso $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = o$. Onde avremo (26) $P = o$, $Q = o$, $R = o$. Il che etc.

31. *Proposizione II.* Determinare le condizioni d' equilibrio d' un punto appoggiato ad una superficie resistente.

Sia l' equazione di questa superficie $dx + m\,dy + n\,dz = o$. Con essa elimineremo (27) dall' equazione $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = o$ l' indeterminata $dx$, onde resterà

$$(Q - m\,P)\,dy + (R - n\,P)\,dz = o$$

E di qui le due condizioni $Q = m\,P$, $R = n\,P$.

32. *Lemma*. Sia la retta $k$ normale alla superficie determinata dall' equazione $dx + m\,dy + n\,dz = o$. Sarà

$$dk = \frac{dx + m\,dy + n\,dz}{\sqrt{(1 + m^2 + n^2)}}$$

Dim. Siano $a$, $b$, $c$ le coordinate dell' e-

stremità della retta $k$, mentre $x$, $y$, $z$ sono le coordinate dell' altra estremità posta sulla superficie. Sarà

$$k = \sqrt{\left((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\right)}$$

onde fatto $dk = L\,dx + M\,dy + N\,dz$, sarà

$$L = \frac{x-a}{k},\ M = \frac{y-b}{k},\ N = \frac{z-c}{k}$$

ed $L^2 + M^2 + N^2 = 1$. Ora se le coordinate $x$, $y$, $z$ variano in modo che il punto da esse determinato rimanga sulla superficie medesima, è palese che in tal caso sarà $dk = 0$. Adunque posto $dx + m\,dy + n\,dz = 0$, dovrà essere $L\,dx + M\,dy + N\,dz = 0$. Si prenda dunque $dx = -m\,dy - n\,dz$, e la funzione $L\,dx + M\,dy + N\,dz$ che allora diventa $(M - m\,L)\,dy + (N - n\,L)\,dz$ dovrà essere $= 0$, qualunque siano le variazioni $dy$, $dz$. Di qui si deduce $M = m\,L$; $N = n\,L$; alle quali equazioni aggiungendo l' altra $L^2 + M^2 + N^2 = 1$, si avrà

$$L = \frac{1}{\sqrt{(1 + m^2 + n^2)}};\ M = \frac{m}{\sqrt{(1 + m^2 + n^2)}};$$

$$N = \frac{n}{\sqrt{(1 + m^2 + n^2)}}$$ onde etc.

32. *Corollario*. Per mezzo di questo Lemma potremo sciogliere il Problema precedente col secondo metodo proposto all' art.

28. Sia $K$ la pressione che il punto esercita sopra la superficie, e $k$ la sua direzione, normale alla superficie stessa. Avremo (28) l' equazione

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz - K\,dk = o$$

o sia (31)

$$Pdx + Qdy + Rdz - K \cdot \frac{dx + mdy + ndz}{\sqrt{(1 + m^2 + n^2)}} = o$$

ed uguagliando a zero i coefficienti delle indeterminate otterremo le tre equazioni

$$P\sqrt{(1 + m^2 + n^2)} = K$$
$$Q\sqrt{(1 + m^2 + n^2)} = m\,K$$
$$R\sqrt{(1 + m^2 + n^2)} = n\,K$$

Eliminando $K$, risulta come sopra $Q = mP$, $R = nP$; e di più trovasi

$$K = \sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)}.$$

## CAP. IV.

### *Dell' equilibrio de' sistemi rigidi.*

33. PROPOSIZIONE I. Determinare le condizioni d' equilibrio d' un sistema rigido.

Un tale sistema non può spostarsi se non per moto progressivo, o per moto rotatorio attorno alcuno de' tre assi ortogonali, o per moto composto d' alcun di questi: giac-

chè impediti questi movimenti, il sistema (I. 99) è assolutamente immobile. Or supposto un moto progressivo qualunque, avremo $dx = dx' = dx''$ etc. $dy = dy' = dy''$ etc. $dz = dz' = dz''$ etc. Posti questi valori nell' equazione ($A$) e servendoci del simbolo S per denotare compendiosamente la somma delle quantità omologhe attenenti a' diversi punti del sistema, onde sia per esempio $S.P = P + P' + P''$ ec. quell' equazione diventa

$$0 = dx S.P + dy S.Q + dz S.R$$

onde abbiamo queste tre condizioni d' equilibrio $S.P = 0$; $S.Q = 0$; $S.R = 0$

Supposta una rotazione minima $d\Phi$ attorno $OZ$ (Fig. 8) asse delle $z$, avremo in primo luogo

$$dz = dz' = dz'' \text{ etc.} \ldots = 0$$

Poscia i triangoli simili $OPQ$, $Qrq$ danno

$$OQ : Qq :: PQ : qr :: OP : Qr; \text{ o sia}$$

$$1 : d\Phi :: y : dx :: x : -dy; \text{ onde}$$

$$dx = y\, d\Phi \quad ; \quad dy = -x\, d\Phi$$

e similmente

$$dx' = y'\, d\Phi \quad ; \quad dy' = -x'\, d\Phi$$

$$dx'' = y''\, d\Phi \quad ; \quad dy'' = -x''\, d\Phi \quad \text{etc.}$$

Con questo l' equazione ($A$) dà immediatamente $0 = S.Py - S.Qx$; o sia

$S.Py = S.Qx$.

In simil guisa supposta una rotazione infinitesima attorno $OY$, si avrà la quinta

condizione S. $Pz$ = S. $Rx$; e supposta la rotazione attorno $OX$, si avrà la sesta S. $Qz$ = S. $Ry$.

34. *Scolio I.* Questa è la via più breve per dedurre dal principio delle velocità virtuali le condizioni d'equilibrio d'un sistema rigido. Potremmo giungervi anche per altra strada, tenendo sempre la traccia dell'art. 27, ma esprimendo in diversa guisa la condizione dell' invariabilità del sistema. Siano $f$, $g$, $h$ ec. le rette $AB$, $AC$, $BC$ etc. che uniscono i punti $A$, $B$, $C$ etc. del sistema; e sarà

$$f = \sqrt{\left((x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2\right)}$$

$$g = \sqrt{\left((x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2\right)}$$

$$h = \sqrt{\left((x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2\right)}$$

Ora per la forma invariabile del sistema queste distanze $f$, $g$, $h$ etc. debbono rimanersi invariate, comunque il sistema si muova. Quindi le equazioni $df = 0$, $dg = 0$, $dh = 0$ etc. mercè le quali potremo eliminare dall' equazione $(A)$ altrettante fra le indeterminate $dx$, $dy$, $dz$, $dx'$ etc. Ed eguagliando a zero i coefficienti di quelle che vi rimangono, ci risulteranno le stesse sei equazioni di prima.

35. *Scolio III.* E può vedersi anche senza compiere il calcolo, che per quanti siano i punti componenti il sistema, le equazioni finali saranno sempre sei, nè più, nè meno. Già se quei punti sono tre, l'equazione (*A*) porterà nove indeterminate, fra le quali eliminandone tre colle tre equazioni $df = 0$, $dg = 0$, $dh = 0$ rimarranno sei indeterminate arbitrarie, ed altrettante equazioni.

Chè se i punti sono più di tre, per ogni punto che s'aggiunge, s'accrescono nell'equazione (*A*) tre nuove indeterminate; ma s'accrescon anche tre nuove equazioni colle quali eliminarle. Infatti il sito del nuovo punto è determinato dalle sue distanze dai tre primi. Siano queste distanze $f'$, $g'$, $h'$ ed avremo le tre nuove equazioni $df' = 0$, $dg' = 0$, $dh' = 0$. Quindi al termine delle eliminazioni, rimarranno sempre nell'equazione (*A*) sei indeterminate arbitrarie, come prima.

36. *Scolio IV.* Finalmente si potrebbe anche tenere il metodo dell'art. 28 esprimendo con $p$, $q$, $r$ etc. le tensioni delle rette $f$, $g$, $h$ etc. ed aggiungendo all'equazione (*A*) i termini $-p\,df - q\,dg - r\,dh$ ec. Allora riguardando tutte le indeterminate siccome arbitrarie, si eguaglierà a zero il coefficiente di ciascuna; ed eliminate le quan-

tità $p$, $q$, $r$ ec. si arriverà alle stesse equazioni ultime, con di più il vantaggio di poter determinare le tensioni medesime $p$, $q$, $r$ ec.

37. *Proposizione II.* Determinare le condizioni d'equilibrio d'un sistema rigido sollecitato da forze parallele.

Siano queste forze $S$, $S'$, $S''$ ec. e la loro direzione faccia cogli assi delle $x$, $y$, $z$ gli angoli $l$, $m$, $n$. Sarà $P = S \cos. l$; $Q = S \cos. m$; $R = S \cos. n$; $P' = S' \cos. l$ ec. onde le sei equazioni (33) si riducono a queste quattro:

$$S.\ S = 0;$$
$$\cos. l\ S.\ Sy = \cos. m\ S.\ Sx$$
$$\cos. l\ S.\ Sz = \cos. n\ S.\ Sx$$
$$\cos. m\ S.\ Sz = \cos. n\ S.\ Sy.$$

La prima esprime che il sistema non può aver moto progressivo: le altre esprimono che il sistema non può rotare attorno l'origine delle coordinate; cosicchè se l'origine delle coordinate fosse un punto fisso, basterebbero per l'equilibrio queste tre equazioni ultime.

38. *Proposizione III.* In un sistema rigido sollecitato da forze parallele trovare tal punto, attorno cui non possa rotare il sistema, qualunque siasi la direzione di queste forze.

Siano le coordinate del punto cercato $X$, $Y$, $Z$. Trasportiamo in questo punto l'origine delle coordinate; per il che do-

vremo nelle equazioni (37) in luogo di $x$, $y$, $z$ porre $x-X$, $y-Y$, $z-Z$. Ed esse diverranno

$$\cos. l \left\{ S.Sy - YS.S \right\} = \cos. m \left\{ S.Sx - XS.S \right\}$$

$$\cos. l \left\{ S.Sz - ZS.S \right\} = \cos. n \left\{ S.Sx - XS.S \right\}$$

$$\cos. m \left\{ S.Sz - ZS.S \right\} = \cos. n \left\{ S.Sy - YS.S \right\}$$

Queste tre equazioni esprimono che il sistema non può rotare attorno al punto determinato dalle coordinate $X$, $Y$, $Z$. Ora per la condizion del problema queste equazioni deggiono verificarsi qualunque siasi la direzione delle forze, ed in conseguenza qualunque sieno gli angoli $l$, $m$, $n$. Dovranno adunque porsi eguali a zero i coefficienti di cos. $l$, cos. $m$, cos. $n$; il che dà

$$X = \frac{S.Sx}{S.S}\ ;\ Y = \frac{S.Sy}{S.S}\ ;\ Z = \frac{S.Sz}{S.S}$$

Attorno al punto determinato da queste coordinate non potrà girare il sistema, qualunque siasi la situazione del sistema stesso rispetto alla direzione delle forze parallele; e però questo viene ad essere il centro delle forze parallele, o vogliam dire il centro di gravità.

39. *Coroll. I.* Siano i punti $A$, $B$, $C$ ec. animati dalle forze parallele $S$, $S'$, $S''$ ec.

Fissato un punto o termine qualunque, sia $d$ la distanza di $A$ da questo termine, $f$ la distanza de' due punti $A$, $B$; e finalmente $D$ la distanza del centro delle forze dal termine fissato. Dico che sarà

$$D^2 = \frac{S.Sd^2}{S.S} - \frac{S.SS'f^2}{(S.S)^2}.$$

Quì per $S.Sd^2$ intendo la somma di tutti i prodotti che si ponno formare moltiplicando ciascheduna forza pel quadrato della distanza del suo punto d'applicazione dal termine; e per $S.SS'f^2$ intendo la somma di tutti i prodotti che si ponno formare moltiplicando le forze a due a due, e moltiplicando il prodotto pel quadrato della distanza de' loro punti d'applicazione.

In fatti sarà

$$D^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{(S.Sx)^2 + (S.Sy)^2 + (S.Sz)^2}{(S.S)^2}$$

Facendo poi attualmente i quadrati di $S.Sx$, $S.Sy$, $S.Sz$ vedremo che essi possono rappresentarsi sotto questa forma

$$(S.Sx)^2 = S.S.S.Sx^2 - S.SS'(x'-x)^2$$
$$(S.Sy)^2 = S.S.S.Sy^2 - S.SS'(y'-y)^2$$
$$(S.Sz)^2 = S.S.S.Sz^2 - S.SS'(z'-z)^2$$

Ora si sommino questi tre quadrati, e si sostituisca questa somma nel valore del $D^2$; ed avvertendo essere

$$x^2+y^2+z^2=d^2;\ (x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2=f^2$$

troveremo appunto la proposta espressione di $D^2$.

Mediante questo Teorema che devesi al Sig. La Grange, si conosce la distanza del centro di gravità da un termine qualunque, quando si sappiano le distanze di tutti i punti del sistema da quel termine, e le loro distanze scambievoli.

40. *Coroll. II.* Più facilmente ancora si ricava quest' altro bel Teorema proposto da Leibnizio. Siano in equilibrio attorno al punto $A$ (Fig. 1) quante forze si vuole, espresse in quantità e in direzione dalle rette $AB$, $AC$, $AD$ ec. Sarà $A$ il centro di gravità de' punti $B$, $C$, $D$ ec. considerando questi punti siccome aggravati da pesi eguali.

Siano $X$, $Y$, $Z$ le coordinate del punto $A$; $x$, $y$, $z$ quelle del punto $B$. La forza $AB$ essendo per ipotesi espressa dalla retta $AB$, sarà $=\sqrt{\left((x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2\right)}$ e risolvendola in tre parallele a tre assi, queste tre componenti saranno $x-X$, $y-Y$, $z-Z$. Egualmente la forza $AC$ si risolverà nelle tre $x'-X$, $y'-Y$, $z'-Z$; e la forza $AD$ nelle tre $x''-X$, $y''-Y$, $z''-Z$ ec. Sia $n$ il numero di queste forze equilibrate $AB$, $AC$, $AD$ ec. Avremo per motivo dell' equilibrio (30)

$$x + x' + x'' \ldots - n X = 0$$
$$y + y' + y'' \ldots - n Y = 0$$
$$z + z' + z'' \ldots - n Z = 0$$

Sono adunque le coordinate del punto *A* queste tre

$$X = \frac{S.x}{n} \; ; \; Y = \frac{S.y}{n} \; ; \; Z = \frac{S.z}{n}$$

che sono per l' appunto le coordinate del centro di gravità de' punti *B*, *C*, *D* ec.

Convertendo il discorso apparirà reciprocamente che se il punto *A* sarà centro di gravità de' punti *B*, *C*, *D* ec. sollecitato quel punto dalle forze *AB*, *AC*, *AD* ec. si rimarrà in equilibrio.

41. *Coroll. III.* Di qui ancora il Teorema di Roberval. Se un punto è posto nel centro di gravità d' una piramide triangolare, e sollecitato da quattro forze espresse dalle rette terminate ai quattro vertici della piramide, resterà in equilibrio.

Poichè è facile dimostrare che il cenrro di gravità della piramide è anche centro di gravità di quattro pesi eguali collocati nei quattro vertici.

## CAP. V.

### *Dell' equilibrio d' un sistema di forma variabile.*

### Art. I. *Del Poligono funicolare.*

42. Proposizione. Determinare le condizioni di equilibrio del Poligono funicolare, supponendo che a tutti i termini dei lati siano applicate delle forze qualunque.

Decomposte queste forze parallelamente ai tre assi, avremo (25) l'equazione (*A*). Qui le indeterminate $dx$, $dy$, $dz$, $dx'$ ec. saranno tre volte tante quanti sono i termini de' lati del poligono. Onde se il numero de' termini è $m$, sarà il numero delle indeterminate $3m$.

Ora siano i lati del poligono $f$, $g$, $h$ ec. Poichè questi lati non possono allungarsi, avremo le equazioni di condizione $df = 0$, $dg = 0$, $dh = 0$ ec. tante, quanti sono i lati del poligono, vale a dire $m - 1$. Per via di queste elimineremo nell' equazione (*A*) altrettante indeterminate; ve ne rimarranno $2m + 1$ arbitrarie. Eguaglieremo a zero i loro coefficienti; e saranno queste le equazioni o condizioni d'equilibrio del proposto poligono.

43. *Coroll. I.* Oppure chiamando $p$, $q$, $r$ ec. le tensioni delle funi $f$, $g$, $h$ ec. si formerà l' equazione

$$(A) - p\,df - q\,dg - r\,dh \ldots\ldots = 0$$

e procedendo col metodo indicato all' art. 36 si arriverà alle stesse equazioni.

44. *Coroll. II.* E quì giova avvertire che potremo sempre determinare la situazione di tutti i termini dei lati, ed in conseguenza di tutto il poligono; poichè se alle equazioni che esprimono le condizioni dell' equilibrio in numero di $2m + 1$ aggiungiamo le equazioni di condizione $df = 0$ ec. in numero di $m - 1$, abbiamo fra le coordinate dei vertici del poligono $3m$ equazioni; tante appunto quante bastano per determinar tutte le coordinate.

45. *Coroll. III.* Se il poligono è chiuso, il numero de' termini sarà uguale al numero dei lati; onde le variazioni arbitrarie, e per conseguenza le equazioni dell' equilibrio saranno solamente $2m$.

46. *Coroll. IV.* Se i termini estremi del poligono sono fissi, vi saranno nell' equazione $(A)$ sei indeterminate di meno, perchè mancheranno le sei variazioni appartenenti ai due termini fissi; onde le equazioni dell' equilibrio resteranno solamente $2m - 5$.

Che se i capi del poligono non fossero fissi, ma solamente obbligati a scorrere so-

pra date superficie , le equazioni di queste superficie serviranno ad eliminare nell' equazione ($A$) due indeterminate ; cosicchè il numero delle equazioni finali si ristringerà a $2m-1$.

47. *Coroll. V.* Ma ordinariamente tornerà più comodo cercar prima le condizioni d'equilibrio del poligono riguardando i capi del medesimo siccome fissi ; e determinare le tensioni delle funi estreme. Allora se i capi del poligono non sono fissi, bisognerà di più che queste tensioni facciano equilibrio a quelle forze, o resistenze che sono ad essi capi applicate.

48. *Coroll. VI.* Se alcuno de' nodi ai quali sono applicate le forze fosse scorrevole, quello per esempio che unisce i lati $f$, $g$; allora non è più necessario che $f$ e $g$ siano costanti, ma basterà che lo sia la loro somma $f+g$. Quindi in vece delle due equazioni $df=0$, $dg=0$ abbiamo l'equazione unica $df+dg=0$. Abbiamo dunque un indeterminata di meno da eliminare; e però avremo una condizione di più per l'equilibrio.

49. *Scolio.* Nello sciogliere il Problema precedente, noi abbiamo considerato i lati del nostro poligono, come se fossero verghe d' invariabile lunghezza, congiunte a cerniera in guisa che gli angoli loro possano aprirsi o serrarsi. Che se questi lati fossero fili

o corde flessibili, così che possano incurvarsi, accostandosi le estremità de' lati l' una all' altra, allora è manifesto che per assicurare l' equilibrio del poligono si ricerca una condizione di più, oltre quelle che si ricavano col metodo insegnato: e questa è che le forze applicate ai vertici traggano dall' indentro all' infuori, tendendo a distrarre ed allontanare scambievolmente i vertici stessi.

E viceversa se i lati del poligono fossero tante spranghe inflessibili semplicemente appoggiate l' una contro l' altra senza giunture negli angoli, converrebbe che le forze applicate ai vertici traessero dall' infuori all' indentro, tendendo ad accostare fra loro i vertici stessi.

Egli è poi manifesto che le condizioni che assicurano l' equilibrio del poligono di lati flessibili, assicureranno anche quello del poligono di lati rigidi semplicemente adossati l' uno all' altro, tanto solo che s' intenda rivolta in contrario la direzione di tutte le forze.

50. *Esempio I.* Ora per mostrare con qualche facile esempio l' applicazione de' proposti metodi, prendiamo il caso del poligono tirato da forze parallele, tutto steso in un piano, e fisso ne' due capi $E$, $E'$, quale il rappresenta la Fig. 17 del Vol. I. se non che le direzioni delle forze $P$, $Q$, $R$ deg-

giono figurarsi parallele. Presa l'origine delle ascisse nel punto $E$, e fatte le $x$ perpendicolari, e le $y$ parallele alla direzion delle forze, siano $x$, $y$ le coordinate del punto $A$; $x'$, $y'$ quelle del punto $B$ ec.: onde

$$EA = f = \sqrt{(x^2+y^2)}; AB = g = \sqrt{\left((x'-x)^2 + (y'-y)^2\right)};$$

ed in simil guisa si esprimeranno i lati seguenti $BC = h$, $CE' = i$. L'equazione generale dell'equilibrio è pel nostro poligono

$$(A) \quad P\,dy + Q\,dy' + R\,dy'' = 0$$

che dovrà combinarsi colle quattro equazioni di condizione

$$df = 0, \quad dg = 0, \quad dh = 0, \quad di = 0.$$

Sarà poi $x = f \sin.\alpha$; $y = f \cos.\alpha$

$$x' - x = g \sin.\beta; \; y' - y = g \cos.\beta$$

$$x'' - x' = h \sin.\gamma; \; y'' - y' = h \cos.\gamma$$

$$x''' - x'' = i \sin.\gamma'; \; y''' - y'' = -i \cos.\gamma'$$

Avvertendo questo, ed avvertendo di più che per esser fisso il punto $E'$ abbiamo $dx''' = dy''' = 0$, le quattro equazioni di condizione diventano

$$dx + dy \cot.\alpha = 0$$

$$dx' - dx + (dy' - dy) \cot.\beta = 0$$

$$dx'' - dx' + (dy'' - dy') \cot.\gamma = 0$$

$$dx' - dy'' \cot.\gamma' = 0$$

Eliminiamo prima da queste equazioni le indeterminate $dx$, $dx'$, $dx''$ ed avvertendo essere $\cot.\alpha = -\cot.\beta'$, e $\cot.\beta' = -\cot.\gamma$

avremo

$$o = dy(\cot.\alpha + \cot.\alpha') + dy'(\cot.\beta + \cot.\beta')$$
$$+ dy''(\cot.\gamma + \cot.\gamma')$$

Finalmente se con quest' ultima equazione elimineremo nell' equazione ($A$) una qualunque delle tre variazioni $dy$, $dy'$, $dy''$, ed eguaglieremo a zero i coefficienti delle due che restano, avremo per equazioni dell' equilibrio queste due

$$P(\cot.\beta + \cot.\beta') = Q(\cot.\alpha + \cot.\alpha')$$
$$P(\cot.\gamma + \cot.\gamma') = R(\cot.\alpha + \cot.\alpha')$$

che sono le stesse (I. 135) già ricavate con altro metodo.

Per determinare la situazione de' punti mobili $A$, $B$, $C$ o le loro coordinate $x, y$; $x'$, $y'$; $x''$, $y''$, abbiamo appunto sei equazioni. Le due dell' equilibrio; ove invece di cot. $\alpha$ ec. dovremo porre i loro valori espressi per le coordinate, essendo $\cot.\alpha = \frac{y}{x}$; $\cot.\beta = -\cot.\alpha' = \frac{y'-y}{x'-x}$ ec. E le quattro equazioni di condizione, o piuttosto le quattro ond' esse derivano $f^2 = x^2 + y^2$; $g^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2$ etc.

51. *Esempio II.* La fune $ABC$ (Fig. 9) sospesa tra le due Leve rette $TA$, $CL$ mobili sui fulcri $E$, $E'$ ed aggravate de' pesi $F$, $G$ porta il peso $P$ attaccato ad essa fune con un nodo scorrente. Si domandano

le condizioni dell' equilibrio, e la positura del sistema equilibrato.

Fissata in $E$ l' origine delle ascisse orizzontali, e delle ordinate verticali, siano $x, y$; $x', y'$; $x'', y''$; $x''', y'''$ le coordinate de' punti $A, B, C, E'$. Decomposto poi il peso $F$ in due forze parallele applicate ne' punti $E$ ed $A$, e parimenti il peso $G$ in due applicate in $E'$ e $C$, le forze applicate ne' fulcri restano elise; onde in luogo de' pesi $F, G$ basterà che io consideri in $A, C$ due forze agenti verticalmente all' insù colle direzioni $AH$, $CK$. I valori di queste forze saranno $\frac{F.ET}{AE}$, $\frac{G.E'L}{CE'}$, che per brevità indicheremo colle lettere $H, K$.

Con questa preparazione il Problema è ridotto a quello dell' articolo precedente, dovendosi ricercare l' equilibrio del Poligono $EABCE'$ fisso in $E, E'$, e tirato negli angoli $A, B, C$ dalle forze $-H, P, -K$. Se non che posto $EA=f$, $AB=g$, $BC=h$, $CE'=i$, per motivo del nodo scorrente, invece di quattro equazioni di condizione, avrò (48) solamente queste tre

$$df=0, \quad dg+dh=0, \quad di=0$$

da combinarsi coll' equazione dell' equilibrio

$$-Hdy+Pdy'-Kdy''=0.$$

Compiuto il calcolo sulle stesse tracce dell' articolo precedente, si troveranno que-

ste tre condizioni dell' equilibrio 1.° sin. $\beta =$ sin. $\beta'$ onde nel caso nostro si può inferire $\beta = \beta'$. 2.° cot. $\alpha = \left(1 - \frac{2H}{P}\right)$ cot. $\beta$.

3.° cot. $\gamma' = \left(1 - \frac{2K}{P}\right)$ cot. $\beta$.

Con queste tre equazioni, esprimendovi cot. $\alpha$, cot. $\beta$ ec. per le coordinate, e colle tre altre che esprimono per le coordinate le rette note $f$, $g+h$, ed $i$, determineremo le sei coordinate de' punti mobili $A$, $B$, $C$.

## Art. II. *Del Poligono Elastico*.

52. PROPOSIZIONE. Determinare le condizioni d'equilibrio nel poligono elastico.

Gli angoli di questo poligono si figurano essere altrettanti elastri dotati d'una forza che tende ad aprirli. Sia $E$ la forza del primo elastro formato dai lati $f$, $g$ e sia $e$ l'angolo esterno formato dal lato $g$ col prolungamento del lato $f$. La velocità virtuale della forza $E$ sarà $de$, e il suo momento $Ede$. Parimenti esprimendo con lettere accentate le quantità relative agli angoli susseguenti del poligono, saranno $E'de'$, $E''de''$ ec. i momenti delle forze che agli altri elastri appartengono. Onde l'equazione generale dell'equilibrio sarà pel poligono elastico

$$o = (A) + E\,d\,e + E'\,d\,e' + E''\,d\,e'' \ldots$$

da combinarsi al solito colle equazioni $df = o$, $dg = o$, $dh = o$ ec.

53. *Scolio I.* Oppure conforme all' art. 43 si formerà l'equazione

$$o = (A) - p\,df - q\,dg - r\,dh \ldots$$
$$+ E\,de + E'\,de' + E''\,de'' \ldots$$

la quale ci dispensa dall' avere riguardo alle equazioni di condizione $df = o$ ec.

54. *Scolio. II.* Per potere servirci di queste equazioni come fu insegnato agli art. 27. 28. fa d'uopo esprimere le variazioni $d\,e$, $d\,e'$ ec. in $x, y, z, x', y', z'$ ec. Or questo non è punto difficile. Dicasi $a$ la corda che unisce i termini dei lati $f$, $g$; sarà per la Trigonometria $a^2 = f^2 + 2\,f\,g$ cos. $e + g^2$; onde essendo $f$ e $g$ costanti, si ricava $de = -\dfrac{a\,d\,a}{f\,g \text{ sin. } e}$. Parimente chiamando $b$ la corda che unisce i termini dei lati $g$, $h$, avremo $d\,e' = -\dfrac{b\,d\,b}{g\,h \text{ sin. } e'}$; e così in seguito. Abbiamo ancora

$$a = \sqrt{\left((x''-x)^2 + (y''-y)^2 + (z''-z)^2\right)}$$

$$b = \sqrt{\left((x'''-x')^2 + (y'''-y')^2 + (z'''-z')^2\right)} \text{ ec.}$$

$$\text{Sin. } e^2 = 1 - \left(\frac{f^2 + g^2 - a^2}{2\,f\,g}\right)^2 \text{ ec.}$$

onde avremo sempre il modo di esprimere per le coordinate le variazioni $de$, $de'$ ec.

55. *Scolio III.* La forza che fa un elastro per aprirsi è tanto maggiore quanto più l'elastro è piegato. Si suppone comunemente che sintantoche l'angolo $e$ è acuto, sia la forza elastica proporzionale a sin. $e$. In tale ipotesi l'equazione dell'equilibrio (53) sarà pel poligono omogeneo

$$o = (A) - pdf - qdg \ldots\ldots - E\left(\frac{ada}{fg} + \frac{bdb}{gh} \ldots\ldots\right)$$

essendo $E$ quantità costante.

## Art. III. *Della Curva funicolare.*

56. Ne' sistemi che sino ad ora abbiam contemplati, erano le forze applicate a punti separati l'uno dall'altro. Or volendo sottoporre allo stesso metodo un sistema continuo, converrà distinguere quelle variazioni delle coordinate che nascono quando da un punto del sistema passiamo ad un altro, da quelle che nascono quando quel primo punto si muta di luogo mercè quel moto minimo del sistema da cui misuriamo le velocità virtuali delle forze e i loro momenti. Le prime variazioni denoteremo coi soliti segni $dx$, $dy$, $dz$; le seconde coi segni $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$. Siano $x$, $y$, $z$ le coordinate d'un pun-

to $M$. Quelle del punto prossimo saranno $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$; quelle poi dello stesso punto $M$ trasportato altrove pel moto minimo del sistema saranno $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$. E se il punto $M$ è sollecitato dalle forze $P$, $Q$, $R$ secondo le coordinate $x$, $y$, $z$, saranno i momenti di queste forze $P \delta x$, $Q \delta y$, $R \delta z$.

57. Pel principio delle velocità virtuali devesi raccogliere ed uguagliare a zero la somma de' momenti di tutte le forze che sollecitano il sistema; e questa sarà l'equazion generale dell'equilibrio. Ora io dico che se i punti estremi del sistema sono fissi, questa equazione potrà sempre ridursi alla forma seguente

$$S.(L \delta x + M \delta y + N \delta z) = 0$$

dove il segno S denota l'integrale o la somma de' momenti $L \delta x$, $M \delta y$ ec. estesa per tutta l'ampiezza del sistema proposto.

Imperocchè quand' anche sotto il segno S. s' incontrassero de' termini della forma $A \delta dx$, $A \delta ddx$ ec. questi si potranno sempre trasformare come segue. In primo luogo poichè le variazioni espresse dai segni $d$, $\delta$ sono affatto indipendenti tra loro, si possono questi segni permutare a piacere, onde in vece di $A \delta dx$, $A \delta ddx$ ec. si potrà scrivere $A d \delta x$, $A dd \delta x$ ec. Poscia integrando per parti abbiamo

$$\int A\,d\,\delta\,x = A\,\delta\,x - \int d\,A\,.\,\delta\,x$$

e stendendo l' integrale a tutta l' ampiezza del sistema

$$S\,.\,A\,d\,\delta\,x = A''\,\delta\,x'' - A'\,\delta\,x' - S:d\,A\,.\,\delta\,x$$

ove $A'\,\delta\,x'$ è il valore che acquista $A\,\delta\,x$ nel primo punto del sistema, ed $A''\,\delta\,x''$ quello che acquista nell' ultimo punto del sistema stesso. Ma questi punti sono fissi per ipotesi; dunque $\delta\,x' = \delta\,x'' = 0$; onde

$$S\,.\,A\,d\,\delta\,x = -\,S\,.\,d\,A\,.\,\delta\,x$$

E nello stèsso modo si troverà

$$S\,.\,A\,d\,d\,\delta\,x = S\,.\,d\,d\,A\,.\,\delta\,x$$

Con queste trasformazioni noi potremo sempre condurre l' equazione dell' equilibrio alla divisata forma.

58. Ciò posto, se gli elementi del sistéma fossero del tutto sciolti e sconnessi, le variazioni $\delta\,x$, $\delta\,y$, $\delta\,z$ sarebbono arbitrarie ed indipendenti fra loro; e l' equazione dell' equilibrio trarrebbe con se (26) queste tre $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$. Ma se v' ha legame tra le parti del sistema per cui quelle variazioni dipendano l' una dall' altra, converrà chiamare in sussidio (27) l' equazioni che esprimono questa relazione, onde eliminar di queste variazioni quante più si può, indi eguagliare a zero i coefficienti di quelle che restano. Oppure converrà (28) contare tra le forze applicate agli elementi del sistema anco le reazioni degli ostacoli che li

trattengono; che così le variazioni $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ tornano tutte indipendenti fra loro, e si procede come nel primo caso.

59. Che se i punti estremi del sistema non sono fissi, converrebbe avere riguardo anche ai termini $A' \delta x'$ ec. Ma ordinariamente tornerà più comodo ricercare a parte le condizioni d'equilibrio di questi punti, a quel modo che fu indicato nell'art. 47.

60. *Proposizione I.* Trovare la curva d'equilibrio del filo flessibile $AMB$ (Fig. 10) sollecitato in tutti i suoi elementi da date forze.

Sia $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$, e prendasi per elemento del filo l'archetto $Mm = ds$, che si riguarderà come costante. Siano $P ds$, $Q ds$ le forze che sollecitano l'elemento $Mm$ parallelamente alle $x$ ed alle $y$; e sia $p$ la tensione di quell'elemento o latercolo $Mm$. Riguardandosi la curva come un poligono funicolare infinitilatero, il latercolo $ds$ rappresenterà uno qualunque, come $f$, de' lati del poligono; e l'equazion del poligono (43) diventerà per la curva

$$S.(P ds \delta x + Q ds \delta y - p \delta ds) = 0$$

Ora per ridurre questa equazione alla forma proposta nell'art. 57 osservo essere

$$\delta ds = \delta \surd (dx^2 + dy^2) = \frac{dx}{ds} \delta dx + \frac{dy}{ds} \delta dy$$

Abbiamo poi (57)

$$S.\frac{pdx}{ds}\delta dx = -S.d.\frac{pdx}{ds}.\delta x$$

$$S.\frac{pdy}{ds}\delta dy = -S.d.\frac{pdy}{ds}.\delta y$$

Con queste sostituzioni l' equazione diventa

$$S.\left(\left(Pds + d.\frac{pdx}{ds}\right)\delta x + \left(Qds + d.\frac{pdy}{ds}\right)\delta y\right) = 0$$

onde (58) avremo le due equazioni

$$Pds + d.\frac{pdx}{ds} = 0 \quad ; \quad Qds + d.\frac{pdy}{ds} = 0$$

Per esse potremo conoscere la tensione $p$ in ciascun punto della curva; eliminando poi $p$, avremo l' equazione della curva stessa.

61. *Coroll. I.* Si moltiplichi la prima equazione per $dx$, la seconda per $dy$, e si sommino, dopo d' avere eseguiti i differenziali indicati; ed avvertendo essere $dx^2 + dy^2 = ds^2$; $dxddx + dyddy = dsdds = 0$ risulterà $\quad -dp = Pdx + Qdy$.

62. *Coroll. II.* L' equazione della curva $AMB$ eliminando $p$ riuscirà questa

$$dy\int Pds - dx\int Qds = 0$$

63. *Coroll. III.* Il Problema non sarebbe guari più difficile se le forze che tirano gli elementi del filo agissero in diversi piani. Sarebbe allora $-dp = Pdx + Qdy + Rdz$; e la doppia curvatura del filo sarebbe rappresentata con due qualunque fra queste

equazioni

$$dy\int P\,ds - dx\int Q\,ds = o$$
$$dz\int P\,ds - dx\int R\,ds = o$$
$$dz\int Q\,ds - dy\int R\,ds = o$$

64. *Coroll. IV.* La curva espressa dall' equazione dell' art. 62 sarà anche (49) la curva d' equilibrio d' un arco composto di latércoli rigidi addossati l' uno all' altro. Imperocchè volte in contrario le direzioni di tutte le forze, quell' equazione si rimane la stessa.

65. *Coroll. V.* Sia un velo o un lenzuolo flessibile attaccato ad un cerchio del raggio $CB$, ed in ogni punto della periferia che ha per raggio $PM = y$ sollecitato dalle forze $P$, $Q$. Si cerchi la curva $AMB$ dalla cui rotazione attorno $AC$ si produce la superficie equilibrata di esso velo. Considerando l' equilibrio dell' unghia tenuissima $BAb$, si potrà prendere per elemento di essa il trapezio $Mt$: essendo poi $Mm = ds$ ed $Mq$ proporzionale ad $y$, questo trapezio potrà esprimersi con $yds$. Quindi le forze animatrici dell'elemento $Mt$ saranno $Pyds$, $Qyds$; e la tensione sarà $p.Mq$ e potrà esprimersi col prodotto $py$. Fatte queste mutazioni nell' equazione dell' equilibrio, troveremo

$$-d.py = Pydx + Qydy$$

e l'equazione della curva $AMB$ riuscirà

$$dy\int Pyds - dx\int Qyds = o$$

66. *Proposizione II.* Trovare la curva d'equilibrio d'un filo sollecitato da forze parallele.

Prendendo le $x$ parallele alla direzione delle forze, sarà $Q = o$, onde $\int Qds = A$. Pertanto l'equazion generale di tali curve che sogliono dirsi Catenarie, sarà questa $dy\int Pds = Adx$. Se la catenaria è omogenea, $P$ è costante, e l'equazione diventa $sdy = Adx$.

67. *Coroll. I.* L'equazione della catenaria può rappresentarsi sotto un altra forma, introducendovi l'angolo $rMm$ che fa l'elemento della curva $ds$ colle $x$. Sia quest'angolo $= k$. Sarà $dx = ds \cos. k$; $dy = ds \sin. k$. Posti questi valori, l'equazione della curva diventa $\int Pds = A \cot. k$

68. *Coroll. II.* Differenziando quest'equazione avrèmo $Pds = -\frac{Adk}{\sin. k^2}$. Ora se dicasi $R$ il raggio osculator della curva nel punto $M$, sarà $dk = -\frac{ds}{R}$. Dunque $P = \frac{A}{R \sin. k^2}$. Onde impariamo questa sin-

golare proprietà delle catenarie, che la potenza è in ragion reciproca composta del raggio di curvatura, e del quadrato di sin. $k$.

69. *Proposizione III.* Trovare la curva d'equilibrio d'un filo sollecitato da forze normali al filo stesso.

Sia $N\,ds$ la forza normale alla curva che spinge l'elemento $ds$. Risolvendola nelle due $P\,ds$, $Q\,ds$ parallele alle $x$ ed $y$, avremo (l. 33) $P\,ds = N\,dy$, $Q\,ds = -N\,dx$. Sarà pertanto (62) l'equazione della nostra curva

$$dy \int N\,dy + dx \int N\,dx = 0$$

70. *Coroll. I.* In queste curve la tensione è costante. Infatti colle sostituzioni dell'articolo precedente nel valore del $dp$ (61) troveremo $dp = 0$.

71. *Coroll. II.* L'equazione (60) $P\,ds + d.\frac{p\,dx}{ds} = 0$, poichè $p$ è costante, e $P\,ds = N\,dy$, diventa $N\,ds\,dy + p\,ddx = 0$. Introducendovi l'angolo $k$ (67) quest'equazione prende la forma semplicissima

$$N\,ds - p\,dk = 0$$

L'altra equazione dell'art. 60 condurrebbe allo stesso risultato.

72. *Coroll. III.* Di qui si trae (68) $N = -\frac{p}{R}$. Onde impariamo questa bellissima

proprietà delle nostre curve, che la potenza è da tutto reciprocamente proporzionale al ra... li curvatura.

73. *Esempio* . Discendiamo a qualche caso particolare, ricercando la figura di alcune curve più celebri, e primieramente della Velaria. Sia $E A E'$ ( Fig. 11 ) il profilo della Vela fissa ne' due capi $E$, $E'$ e gonfia dal vento spirante secondo $VM$. Si riferisca la curva all'asse $AB$ parallelo ad $VM$, che passa pel punto della maggiore gonfiezza della vela, ove la tangente è normale ad $AB$. Fatto $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$, se il vento spira con velocità dovuta all'altezza $S$, sarà ( II. 317 ) la forza dell'urto normale proporzionale ad $S \sin. k^2$. Quindi faremo $N = - m S \sin. k^2$, adoprando il segno $-$ perchè ( I. 33 ) la direzione di questa forza fa angolo ottuso colle $x$ positive;

e l'equazione (71) darà $ds = \frac{-p\,dk}{m S \sin. k^2}$ ; ed

integrando, $s = \frac{p \cot. k}{m S}$ ; ovvero $s\,dy = \frac{p\,dx}{m S}$.

Non serve aggiunger costante, giacchè $s = 0$ dà $\cot. k = 0$. È quindi manifesto che la Velaria è la stessa curva che la catenaria omogenea posta coll'asse parallelo ad $VM$.

74. *Esempio II.* Vogliasi tener conto anche del peso della Vela, che per più faci-

lità supporremo omogenea, e percossa da vento orizzontale. Allora oltre la forza $N$ dovremo considerare anche la forza costante $-Q$ agente in direzione contraria alle $y$. Sarà $dp = Q\,dy$, onde $p = A + Qy$. Poscia per l' equazione della curva non potremo più servirci dell' equazione (71) $N\,ds - p\,dk = 0$, ma converrà risalire all'altra $Pds + d\,.\,\frac{p\,dx}{ds} = 0$ che nel nostro caso diventa $Ndy + d\,.(A + Qy)$ $\cos.\,k = 0$ onde avremo $-m\,S\,dy\sin.\,k^2 - A\,dk\sin.\,k + Q\,dy\cos.\,k - Qy\,dk\sin.\,k = 0$, e quindi

$$\frac{dy}{A + Qy} = \frac{dk}{Q\cot.\,k - m\,S\sin.\,k}$$

75. *Esempio III.* Passiamo ora alla curva Linteare. E sia $EAE'$ ( Fig. 12 ) il profilo del lenzuolo attaccato in $E$ ed in $E'$, e disteso dalla pressione d' un liquido che vi sovrasti al livello $BB$. Prendiamo per asse la verticale $AP$ elevata sul punto infimo della curva, ove la tangente è orizzontale. Sia $AB = b$. Sarà la pressione normale sopra il punto $M$ ( II. 40 ) proporzionale a $b - x$, onde faremo $N = -m\,(b - x)$. E l' equazione (71) postovi per $ds$ il suo valore $\frac{dx}{\cos.\,k}$, diventerà

$$m\,b\,dx - m\,x\,dx + p\,dk\cos.\,k = 0$$

Integrando così che $x=0$ dia sin. $k=1$, sarà

$$p-mbx+\frac{1}{2}mx^2=p\ \text{sin.}\ k=\frac{p\,dy}{ds}.$$

Pongasi per brevità il primo membro $=X$; e sarà

$$ds=\frac{p\,dy}{X};\ \text{ovvero}\ dy=\frac{X\,dx}{\sqrt{(p^2-X^2)}}$$

76. *Esempio IV.* Per la Linteare grave ed omogenea, oltre la forza $N$ vi sarà la forza costante $-P$ agente contro le ascisse. E sarà $dp=P\,dx$, onde $p=A+Px$. E l' equazione (60) $Q\,ds+d.\frac{p\,dy}{ds}=0$ diventerà $-N\,dx+d.(A+Px)\frac{dy}{ds}=0$. Sostituendo per $N$ il suo valore (75), poscia integrando così che $x=0$ dia $\frac{dy}{ds}=\text{sin.}\,k=1$, avremo

$$A-mbx+\frac{1}{2}mx^2=(A+Px)\frac{dy}{ds}$$

Facciasi il primo membro $=X$; e riuscirà $ds=\frac{(A+Px)\,dy}{X}$; ovvero

$$dy=\frac{X\,dx}{\sqrt{\left((A+Px)^2-X^2\right)}}$$

## Art. IV. *Della curva Elastica*.

77. PROPOSIZIONE. Trovare la curva d' equilibrio d' una lastra elastica ed omogenea, sollecitata da date forze.

Sia questa curva $AMB$ ( Fig. 10 ) e conservate le stesse denominazioni (60) sia di più $e$ l' angolo del contatto, o sia l' angolo $Tmn$ fatto dal latercolo $Mm$ prolungato col latercolo prossimo $mn$; e sia $R$ il raggio di curvatura nel punto $M$. Sarà $e = \frac{ds}{R}$. Ora l' elasticità nel punto $M$, giusta l' ipotesi dell' art. 55 è proporzionale a sin. $e$ ovvero ad $e$, giacchè l' angolo infinitesimo si confonde col suo seno; quindi la forza elastica sarà reciprocamente proporzionale ad $R$, e potrà esprimersi per $\frac{E}{R}$, essendo $E$ quantità costante; e sarà il suo momento $\frac{E}{R}\delta e$, o sia $\frac{E}{R}\delta\frac{ds}{R}$. Posto ciò, riguardando la curva siccome un poligono elastico infinitilatero avremo (53) l' equazione

$$S.\left(Pds\delta x + Qds\delta y - p\delta ds + \frac{E}{R}\delta\frac{ds}{R}\right) = 0$$

Conviene ora ridurre quest' equazione alla forma proposta nell' art. 57. L' integrale $S.p\delta ds$ si riduce come sopra all' art. 60. Resta l' altro integrale $S.\frac{E}{R}\delta\frac{ds}{R}$. Mettendo per $R$ il suo valore $\frac{dsdy}{ddx}$ ovvero $-\frac{dsdx}{ddy}$ troviamo $\frac{ds}{R}=\frac{1}{ds}\sqrt{\left((ddx)^2+(ddy)^2\right)}$. Quindi $\delta.\frac{ds}{R}=\frac{Rddx}{ds^3}\delta ddx+\frac{Rddy}{ds^3}\delta ddy$.

Ma per le riduzioni insegnate all' art. 57

$$S.\frac{E}{R}.\frac{Rddx}{ds^3}\delta ddx=S.\frac{Ed^4x}{ds^3}.\delta x$$

$$S.\frac{E}{R}.\frac{Rddy}{ds^3}\delta ddy=S.\frac{Ed^4y}{ds^3}.\delta y$$

Facendo queste sostituzioni nell' equazione dell' equilibrio, poscia eguagliando a zero i coefficienti delle variazioni $\delta x$, $\delta y$, avremo in ultimo queste due equazioni

$$Pds+d.\frac{pdx}{ds}+\frac{Ed^4x}{ds^3}=0$$

$$Qds+d.\frac{pdy}{ds}+\frac{Ed^4y}{ds^3}=0$$

Per esse determineremo la tensione $p$, eliminata la quale, ci resterà l'equazione della curva.

78. *Coroll. I.* Facendo attualmente i differenziali, e sommando le due equazioni molti-

plicate rispettivamente per $dx$ e per $dy$, trovo

$$-dp = Pdx + Qdx + \frac{E}{ds^4}(dxd^4y + dyd^4y)$$

o sia $-dp = Pdx + Qdy + \frac{3\,E\,d\,R}{R^3}$; onde

$$p = \text{cost.} + \frac{3\,E}{2\,R^2} - \int (P\,d\,x + Q\,d\,y)$$

79. *Coroll. II.* Poscia per avere l'equazione della curva, s'integrino le due equazioni (77) e si elimini $p$; verrà

$$dy\int Pds - dx\int Qds = \frac{E}{d\,s^3}(dxd^3y - dyd^3x)$$

ed integrando di nuovo

$$\int dy\int Pds - \int dx\int Qds = \frac{E}{ds^3}(dxddy - dyddx)$$

Ma $d\,x\,d\,d\,y - d\,y\,d\,d\,x = -\frac{d\,s^3}{R}$. Dunque in fine sarà l'equazione cercata

$$\int d\,y\int P\,d\,s - \int d\,x\int Q\,d\,s + \frac{E}{R} = 0$$

80. *Coroll. III.* Se le forze applicate alla lastra agissero in diversi piani, prendendo tre coordinate avremmo queste tre equazioni

$$\int dy\int Pds - \int dx\int Qds = \frac{E}{ds^3}(dxddy - dyddx)$$

$$\int dz\int Pds - \int dx\int Rds = \frac{E}{ds^3}(dxddz - dzddx)$$

$$\int dz\int Qds - \int dy\int Rds = \frac{E}{ds^3}(dyddz - dzddy)$$

due delle quali sono sufficienti à determinare la doppia curvatura della lastra.

81. *Coroll. IV.* Se la lastra non fosse omogenea, o se l' elasticità non si volesse supporre in ragione inversa del raggio di curvatura, allora invece di esprimere l' elasticità per $\frac{E}{R}$, la denoteremmo semplicemente per $E$, intendendo per $E$ non più una costante, ma una variabile, funzione di $x$ e di $y$. Ed invece dell' equazione (79) avremmo la seguente

$$\int dy \int P\,ds - \int dx \int Q\,ds + E = 0$$

82. *Esempio.* Sia la lastra $AMB$ grave, fissa nell' estremo $A$, e tirata nell' estremo $B$ dalla forza $BS$.

Risolvasi questa $BS$ in due forze, l' una $-F$ orizzontale, l' altra $G$ verticale. Avremo $Q = 0$, e $\int Q\,ds = -F$. Avremo poi $P$ costante, e $\int P\,ds = Ps + G$. Quindi l' equazione (79) della curva diventerà

$$\frac{E}{R} = A - Fx - Gy - P\int s\,dy$$

essendo $A$ una costante.

Per rendere il Problema ancor più semplice, trascuriamo la gravità della lastra, e sia essa curvata soltanto da un peso $G$ attaccato all' estremità $B$. Sarà $\frac{E}{R} = A - Gy$. La

costante $A$ si determinerà avvertendo che l' inflessione dell'ultimo latercolo $cB$ dev' esser nulla, poichè il peso $G$ che vi è applicato immediatamente non ha momento alcuno per farlo girare attorno al punto $c$, nè fa forza per piegarlo. Quindi se l' ultima ordinata $CB$ dicasi $= c$, bisogna che quando $y=0$, divenga $\frac{E}{R}=0$; onde $A=Gc$; e l' equazione diventa

$$\frac{E}{R}=G(c-y)$$

Quest'equazione consente appunto con quella che si trovò negli Elementi (I. 453) per esprimere l' incurvamento delle travi fitte nel muro.

Che se la lastra fosse piantata verticalmente, e si piegasse pel carico d' un peso $G$ postovi in cima, avremmo allora $\int Q\,ds=0$, $\int P\,ds=-G$; onde l' equazione $\frac{E}{R}=Gy$. Non occorrerà aggiunger costante, poichè $y=0$ dà $\frac{E}{R}=0$, come deve essere pel motivo pocanzi detto. Ancor questa equazione concorda benissimo con quella che si trovò altrove (I. 470) per esprimere l' inarcamento de' fusti delle colonne.

# SEZIONE SECONDA

## De' Principj della Dinamica.

### CAP. I.

*Teoria generale del moto de' corpi.*

83. INSEGNÒ già il Sig. d'Alembert (I. 261) per qual via possano dedursi le leggi del moto d'un sistema da quelle dell'equilibrio. Avendo noi pertanto dal principio delle velocità virtuali conseguita (25) un equazion generale (*A*) atta a rappresentare l'equilibrio d'un sistema da date forze animato, potremo ora similmente ricavarne un altra atta a determinare il moto che dall'azione di quelle forze sarà impresso al sistema.

84. Siano i punti $A$, $B$, $C$ ec. tra se collegati in qualsivoglia modo, e sollecitati da date forze. Siano $P$, $Q$, $R$ le forze acceleratrici che sollecitano il punto $A$ secondo le sue coordinate $x$, $y$, $z$; e scorso il tempo $t$ movasi quel punto colla velocità $V$, la quale si risolva nelle tre velocità $u$, $v$, $w$ secondo $x$, $y$, $z$ rispettivamente. Nell'istante susseguente esso avrà le velocità $u+du$, $v+dv$, $w+dw$. Ma per

l'azione libera delle potenze acceleratrici, dovrebbe aver concepite (I. 184) le velocità $u + P\,dt$, $v + Q\,dt$, $w + R\,dt$. Dunque rimangono spente pel contrasto tra le parti del sistema le velocità $P\,dt - du$, $Q\,dt - dv$, $R\,dt - dw$. Parimente se distinguiamo con un accento le quantità omologhe appartenenti al punto $B$, troveremo che esso perde le velocità $P'\,dt - du'$, $Q'\,dt - dv'$, $R'\,dt - dw'$; e così degli altri. Ora le forze corrispondenti a queste velocità perdute deggiono (I. 261) equilibrarsi fra loro. Dunque se io supporrò i punti $A$, $B$, $C$ ec. animati soltanto da queste forze $P\,dt - du$ ec. ed immaginerò che il sistema prenda un moto minimo conciliabile colle condizioni particolari di esso sistema, pel qual moto le coordinate $x$, $y$, $z$ del punto $A$ ricevano le variazioni $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, e le coordinate $x'$, $y'$, $z'$ del punto $B$ ricevano le variazioni $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ ec. avrò pel principio delle velocità virtuali questa equazione

$$(B) \quad o = (Pdt - du)\delta x + (P'dt - du')\delta x' \ldots + (Qdt - dv)\delta y + (Q'dt - dv')\delta y' \ldots + (Rdt - dw)\delta z + (R'dt - dw')\delta z' \ldots$$

85. Dividendo per l'elemento del tempo $dt$, che riguarderemo come costante, ed avvertendo essere (I. 184) $u = \frac{dx}{dt}$, $v = \frac{dy}{dt}$,

$w = \frac{dz}{dt}$, l'equazione (*B*) può anche rappresentarsi sotto questa forma

$$(B)\quad o = \left(P - \frac{ddx}{dt^2}\right)\delta x + \left(P' - \frac{ddx'}{dt^2}\right)\delta x' \ldots$$
$$+ \left(Q - \frac{ddy}{dt^2}\right)\delta y + \left(Q' - \frac{ddy'}{dt^2}\right)\delta y' \ldots$$
$$+ \left(R - \frac{ddz}{dt^2}\right)\delta z + \left(R' - \frac{ddz'}{dt^2}\right)\delta z' \ldots$$

86. Ora se i punti del sistema fossero sciolti d'ogni vincolo, le variazioni $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, $\delta x'$ ec. sarebbono tutte arbitrarie; si dovrebbero adunque eguagliare a zero i loro coefficienti, ed avremmo per determinare il moto del punto *A* le tre equazioni $P\,dt = du$, $Q\,dt = dv$, $R\,dt = dw$; ovvero $P = \frac{ddx}{dt^2}$, $Q = \frac{ddy}{dt^2}$, $R = \frac{ddz}{dt^2}$; e pel moto del punto *B* le tre equazioni $P'dt = du'$, $Q'dt = dv'$, $R'dt = dw'$ ec.

Ma stante il vincolo che lega i punti del sistema, converrà servirsi delle equazioni di condizione onde eliminare dall' equazione (*B*) quante più si potrà delle indeterminate $\delta x$, $\delta y$ ec. Oppure converrà contare tra le forze applicate al sistema anche le reazioni degli ostacoli. In somma dovrà trattarsi l' equazione (*B*) come insegnammo do-

versi fare dell' equazione ($A$) agli articoli 26. 27. 28.

87. Se il punto $A$ fosse il centro di gravità d' una massa $m$, animata in tutti i suoi elementi dalle potenze acceleratrici $P$, $Q$, $R$, le forze agenti sul punto $A$ sarebbero $m P$, $m Q$, $m R$; e le forze estinte sarebbero $m(Pdt - du)$, $m(Qdt - dv)$, $m(Rdt - dw)$. E se parimente ne' punti $B$, $C$ ec. siano le masse $m'$, $m''$ ec. si vede che per adattare l'equazione ($B$) a questo sistema di masse conviene in luogo di $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ mettere $m \delta x$, $m \delta y$, $m \delta z$; ed in luogo di $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ mettere $m' \delta x'$, $m' \delta y'$, $m' \delta z'$ ec.

## C A P. II.

### *Teoremi Dinamici dedotti dalla Teoria precedente.*

88. PROPOSIZIONE *I.* Il centro di gravità d'un sistema libero così si muove, come se tutta la massa del sistema vi fosse riunita, e tutte le forze vi fossero immediatamente applicate.

Sia formato il sistema dalle masse $m$, $m'$, $m''$ ec. sollecitate dalle forze acceleratrici $P$, $Q$, $R$; $P'$, $Q'$, $R'$ ec. Intendo per centro di gravità del sistema il centro di

gravità delle masse $m$, $m'$, $m''$ ec. considerate come se fossero altrettanti pesi; e dico che se il sistema è libero, vale a dire senza ritegno di punti fissi o altri ostacoli esterni, questo centro di gravità così si muove come farebbe una sola massa S. $m$ sollecitata dalle forze S. $mP$, S. $mQ$, S. $mR$.

Dim. Valendo l' equazione ($B$) per ogni moto minimo conciliabile colle condizioni del sistema, varrà anche per un moto progressivo; giacchè se il sistema è libero, può senza dubbio concepire un tal moto. Or supposto un moto progressivo qualunque, sarà $\delta x = \delta x' = \delta x''$ ec. $\delta y = \delta y' = \delta y''$ ec. $\delta z = \delta z' = \delta z''$ ec. Ponendo nell' equazione ($B$) questi valori, indi eguagliando a zero i coefficienti delle variazioni residue $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ avremo

$$\text{S}.mP = \text{S}.\frac{m\,ddx}{dt^2}\,;\ \text{S}.mQ = \text{S}.\frac{m\,ddy}{dt^2}\,;$$

$$\text{S}.mR = \text{S}.\frac{m\,ddz}{dt^2}$$

Or siano $X$, $Y$, $Z$ le coordinate del centro di gravità; sarà

$\text{S}.mx = X\text{S}.m$; $\text{S}.my = Y\text{S}.m$; $\text{S}.mz = Z\text{S}.m$ e differenziando due volte, e dividendo a ciascuna volta per $dt$

$$\text{S}.\frac{mddx}{dt^2} = \frac{ddX}{dt^2}\text{S}.m\,;\ \text{S}.\frac{mddy}{dt^2} = \frac{ddY}{dt^2}\text{S}.m\,;$$

$$\text{S}.\frac{mddz}{dt^2} = \frac{ddZ}{dt^2}\text{S}.m$$

onde in fine abbiamo queste tre equazioni

$$\frac{S.mP}{S.m}=\frac{ddX}{dt^2};\ \frac{S.mQ}{S.m}=\frac{ddY}{dt^2};\ \frac{S.mR}{S.m}=\frac{ddZ}{dt^2}$$

Or queste equazioni sono appunto (86) quelle che determinano il moto d'un punto sollecitato dalle forze acceleratrici $\frac{S.mP}{S.m}$, $\frac{S.mQ}{S.m}$, $\frac{S.mR}{S.m}$; ovvero, il che torna lo stesso, d'una massa $S.m$ sollecitata dalle forze $S.mP$, $S.mQ$, $S.mR$. Dunque ec.

89. *Coroll. I.* Se non vi sono forze acceleratrici, ed il sistema si muove solo per velocità preconcepite, o per impulsi momentanei comunicati alle diverse masse $m$, $m'$, $m''$ ec. il centro di gravità cammina equabilmente in linea retta.

90. *Coroll. II.* Lo stesso avviene se le forze acceleratrici consistono in attrazioni scambievoli d'una massa verso dell'altra, o d'un punto verso dell'altro.

Poichè siccome l'attrazione del punto $A$ sopra $B$ è uguale e contraria a quella del punto $B$ sopra $A$, ed è così di tutti gli altri punti, è palese che trasportate tutte queste forze nel centro di gravità, la risultante sarà nulla. Adunque per esse il centro di gravità non concepirà verun moto; nè potrà muoversi se non per le velocità

preconcepite, o per gl' impulsi momentanei comunicati al sistema; e questo moto è necessariamente (89) uniforme e rettilineo.

91. *Coroll. III.* Di qui si raccoglie che l' azione scambievole fra le parti d' un sistema libero non apporta verun cambiamento al moto del suo centro di gravità. Nel che consiste il principio conosciuto in meccanica sotto il nome di *Conservazione del moto del centro di gravità*.

92. Movasi un punto per la curva $BMS$ (Fig. 13) descrivendo nell' istante $dt$ l' archetto $Mm$. Se da un *centro* $O$ conduco i *raggi vettori* $OM$, $Om$, il triangolo $MOm$ si dirà l' *Area elementare* descritta nell' istante $dt$ attorno il centro $O$. La somma di tutte le aree elementari costituisce l' *Area* intera descritta nel tempo $t$.

Sia $Qq$ la projezione dell' archetto $Mm$, ed $OQ$, $Oq$ le projezioni de' raggi vettori $OM$, $Om$ sopra un piano qualunque $XOY$. Il triangolo $QOq$ sarà la projezione dell' area elementare; e la somma di tutte queste projezioni costituisce la projezione dell' area intera descritta nel tempo $t$ dal punto $M$ attorno il centro $O$.

93. *Lemma I.* Esprimere analiticamente le projezioni delle aree descritte dal punto $M$ attorno l' origine delle coordinate, e riportate sui piani delle coordinate $x$, $y$, $z$.

Siano $OX$, $OY$, $OZ$ i tre assi, ed $OP=x$, $PQ=y$, $QM=z$ le coordinate del punto $M$. Sia sul piano $XOY$ il triangolo $QOq$ la projezione dell'area elementare $MOm$ descritta nel tempetto $dt$. Condotta da $Q$ la perpendicolare $QR$ sopra $Oq$, sarà $QOq=\frac{1}{2}Oq.QR$. Ma $Oq=OQ=\sqrt{(x^2+y^2)}$; $QR=\sqrt{(Qq^2-Rq^2)}$; dove essendo $Qq^2=dx^2+dy^2$, $Rq=d.OQ=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$, compiuto il calcolo, troveremo $QOq=\frac{1}{2}(ydx-xdy)$. Adunque se chiamiamo $A$ la projezione dell'area sul piano $XOY$, avremo

$$2dA=ydx-xdy$$

E similmente chiamando $B$, $C$ le projezioni dell'area sui piani $XOZ$, $YOZ$ troveremo

$$2dB=zdx-xdz$$
$$2dC=zdy-ydz.$$

94. *Lemma II.* In ogni sistema libero sollecitato da qualsivoglia forze, hanno luogo queste tre equazioni

$$\mathrm{S}.m\frac{yddx-xddy}{dt^2}=\mathrm{S}.m(Py-Qx)$$
$$\mathrm{S}.m\frac{zddx-xddz}{dt^2}=\mathrm{S}.m(Pz-Rx)$$
$$\mathrm{S}.m\frac{zddy-yddz}{dt^2}=\mathrm{S}.m(Qz-Ry).$$

Dim. Poichè il sistema è libero, potrà concepire moto rotatorio attorno un asse qualunque. Or supposta una rotazione minima $d\varphi$ attorno l' asse delle $z$, sarà (33)

$$\delta x = y\delta\varphi\,,\ \delta y = -x\delta\varphi\,,\ \delta z = 0$$

$$\delta x' = y'\delta\varphi\,,\ \delta y' = -x'\delta\varphi\,,\ \delta z' = 0 \text{ ec.}$$

Posti questi valori nell' equazione $(B)$, e sa si trasforma nella prima delle tre equazioni annunciate. Similmente supposta una rotazione minima attorno l' asse delle $y$, si avrà la seconda equazione; e supposta la rotazione attorno l' asse delle $x$, si avrà la terza.

95. *Scolio*. Quando il sistema è libero, queste tre equazioni vagliono sempre e generalmente, dovunque si ponga l' origine, e comunque si costituiscano gli assi delle coordinate.

Se v' è nel sistema un punto fisso vagliono tuttavia quelle tre equazioni, purchè però l' origine delle coordinate si costituisca nel punto fisso.

Se vi sono due punti fissi, ovvero un asse immobile, allora prendendo quell' asse per asse v. g. delle $z$; avrà luogo bensì la prima equazione, ma non già le altre due.

96. *Proposizione II.* Sia un sistema libero riferito a tre assi $OX$, $OY$, $OZ$, e le forze acceleratrici $P$, $Q$, $R$ sieno tali che i loro momenti di rotazione attorno ciascuno

di quei tre assi si annullino. L'area descritta nel tempo $t$ da ciascuna massa $m$ attorno l'origine $O$ s'intenda projettata sul piano $XOY$. La somma di queste projezioni moltiplicate ciascuna per la massa a cui appartiene, sarà proporzionale al tempo $t$. E sarà lo stesso delle projezioni fatte sopra i piani $XOZ$, $YOZ$.

Dim. Giacchè per ipotesi la somma de' momenti di rotazione delle forze $P$, $Q$, $R$ attorno ciascuno dei tre assi è nulla, sarà (l. 110) $S.m(Py-Qx)=o$; $S.m(Pz-Rx)=o$; $S.m(Qz-Ry)=o$. Altronde chiamando come sopra $A$, $B$, $C$ le projezioni delle aree sui piani $XOY$, $XOZ$, $YOZ$, abbiamo (93)

$$yddx-xddy=d.(ydx-xdy)=2ddA$$
$$zddx-xddz=d.(zdx-xdz)=2ddB$$
$$zddy-yddz=d.(zdy-ydz)=2ddC$$

Con questo le tre equazioni (94) diventano

$$S.m\frac{2ddA}{dt^2}=o\,;\; S.m\frac{2ddB}{dt^2}=o\,;\; S.m\frac{2ddC}{dt^2}=o$$

Integrando col fare $dt$ costante, e così che l'integrale cominci quando $t=o$, abbiamo $S.2mA=ct$; $S.2mB=c't$; $S.2mC=c''t$ essendo $c$, $c'$, $c''$ coefficienti costanti. Dunque ec.

In questo Teorema consiste il principio conosciuto col nome di *Conservazione delle aree*.

97. *Coroll. I.* La condizione dell'annullarsi i momenti di rotazione delle forze acceleratrici rispetto a tutti tre gli assi, può avverarsi in più casi. Primieramente quando non vi sono forze acceleratrici, ed il sistema si muove per impulsi momentanei, o per velocità preconcepite. Allora la condizione è adempiuta dovunque si ponga l'origine delle coordinate, e qualunque ne siano gli assi. Pertanto in questo caso se consideriamo le aree descritte attorno un punto qualunque, e le projezioni loro sopra un piano qualunque che passi per quel punto, la somma di queste projezioni moltiplicate ciascuna per la massa corrispondente, dovrà essere proporzionale al tempo.

98. *Coroll. II.* In secondo luogo, quando le forze acceleratrici consistono in attrazioni scambievoli tra un punto e l'altro: poichè queste forze a due a due sono eguali e contrarie, onde i loro momenti di rotazione sono nulli rispetto di qualunque asse immaginabile. Anche in questo caso come nel precedente, il Teorema vale per le aree descritte attorno un punto qualunque, e projettate sopra qualunque piano che passi per quel punto.

99. *Coroll. III.* In terzo luogo, quando le forze acceleratrici sono tutte dirette ad un sol centro. Allora il momento di rotazione

di ciascuna forza sarà nullo rispetto di ogni asse condotto per quel centro. Quindi in questo caso vale il Teorema soltanto per le aree descritte attorno al centro delle forze, e projettate sopra un piano che passi per il suddetto centro.

100. *Coroll. IV.* Se un corpo è sollecitato da una forza acceleratrice diretta ad un centro, descriverà intorno ad esso delle aree proporzionali ai tempi; e viceversa.

Sia $O$ il centro della forza, ed $XOY$ un piano condotto per $O$ e per la direzione della velocità da principio impressa al mobile. È facile il vedere che la trajettoria giacerà tutta sul piano $XOY$. Quindi l'area descritta dal corpo si confonde colla sua projezione $A$. Ora abbiamo (99) $2mA = ct$: dunque ec.

E viceversa se $2mA = ct$, sarà ancora $\frac{2m\,d\,d\,A}{dt^2} = 0$. Dunque (96) sarà nullo il momento di rotazione della forza rispetto dell' asse $OZ$. Dunque la sua direzione taglierà l'asse $OZ$; e poichè giace nel piano $XOY$, passerà necessariamente pel punto $O$.

101. *Proposizione III.* Sia il sistema da tali forze animato, che $Pdx + Qdy + Rdz$ sia una differenziale esatta $= d\Phi$, e similmente $P'dx' + Q'dy' + R'dz' = d\Phi'$ ec. Sarà

$$S.mV^2 = \text{cost.} + 2S.m\Phi$$

Dim. Valendo l'equazione ($B$) per ogni moto minimo che possa cadere nel sistema proposto, valerà senza dubbio anche per quel moto minimo che il sistema realmente concepisce nell'istante $dt$. Potremo adunque nell'equazione ($B$) fare $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, $\delta z = dz$, $\delta x' = dx'$ ec. Con queste sostituzioni essa diventa

$$S.\,m\,(u\,du + v\,dv + w\,dw) = S.\,m\,d\Phi$$

ed integrando

$$S.\,\frac{1}{2}\,m\,(u^2+v^2+w^2) = S.\,\frac{1}{2}\,mV^2 = S.\,m\Phi + \text{cost.}$$

onde ec.

102. *Coroll. I.* Se non vi sono forze acceleratrici, la somma delle forze vive (I. 310) de' corpi del sistema, o sia la forza viva totale del sistema, è costante. Nel che consiste il principio così detto della *Conservazione delle forze vive*.

103. *Coroll. II.* Ma quando vi sono forze acceleratrici, la forza viva si muta nel passare il sistema da una situazione ad un altra; e cresce o cala, secondo che cresce o cala $S.\,m\Phi$.

Sia nel principio del moto $V = U$, e $\Phi = \phi$. Sarà dunque allorchè $t = 0$, $S.\,m\,U^2 =$ cost. $+ 2\,S.\,m\phi$. Ma scorso il tempo $t$ abbiamo $S.\,m\,V^2 =$ cost. $+ 2\,S.\,m\,\Phi$. Adunque sarà il guadagno della forza viva

$S.mV^2 - S.mU^2 = 2S.m\Phi - 2S.m\Phi.$

104. *Coroll. III.* Il valore di $\Phi$ non dipende se non che dalle forze acceleratrici $P$, $Q$, $R$ e dalle coordinate $x$, $y$, $z$ de' punti a cui sono applicate. Dal che si raccoglie. 1.° Che se dopo un tempo $t$ i punti $A$, $B$, $C$ ec. del sistema saranno tornati dov' erano da prima, anche la forza viva del sistema sarà tornata qual era prima, qualunque siano state le curve descritte dai sudetti punti. 2.° Che se quei punti sono passati altrove, come in $a$, $b$, $c$ ec. la forza viva avrà bensì sofferto cangiamento; ma questo cangiamento sarà lo stesso, qualunque siano state le curve $Aa$, $Bb$, $Cc$ ec. descritte dà varj punti del sistema.

105. *Coroll. IV.* Applicando queste dottrine al movimento d' un sol corpo isolato, si vede che se questo non è spinto da forza acceleratrice, il suo moto sarà uniforme, qualunque curva esso percorra. Poichè sarà $\Phi = 0$, e quindi $mV^2$ ed anche $V$ saranno costanti.

106. *Coroll. V.* Ma se viene stimolato da forze acceleratrici, e partendo dal punto $A$ con una data velocità $U$ sia pervenuto nel punto $a$, la velocità $V$ che egli avrà in $a$ sarà la medesima, qualunque sia stata la curva $Aa$ per cui v' è giunto. Poichè (104) la mutazione della forza viva $mV^2 - mU^2$, e

per conseguenza anche la velocità $V$, è affatto indipendente dalla curva $Aa$.

107. *Coroll. VI.* Sia un sistema di corpi gravi che partendo dalla quiete si muova, cangiando comunque di sito. Ad ogni istante del moto la forza viva del sistema sarà la stessa che sarebbe se ciascuno de' corpi fosse disceso liberamente per un eguale altezza verticale.

Poichè se prendiamo le ordinate $z$ verticali, sarà $\Phi = gz$, chiamando $g$ la gravità. Adunque se nel principio del moto era $z = Z$, ed $U = 0$, avremo (103) $S.mV^2 = 2gS.mz - 2gS.mZ$. Ora fingiamo che ciascuna massa $m$ scenda liberamente per l' altezza $z - Z$; essa avrà acquistata la velocità $\sqrt{2g(z - Z)}$, onde la sua forza viva sarà $2mg(z - Z)$, e la forza viva del sistema sarà come sopra $2gS.mz - 2gS.mZ$. Dunque ec.

108. *Coroll. VII.* Nella stessa ipotesi, il centro di gravità del sistema sarà disceso di tanto, di quanto risalirebbe, se ciascun corpo risalisse verticalmente colla velocità acquistata nel discendere.

La discesa del centro di gravità esprimesi palesemente per $\frac{S.mz - S.mZ}{S.m}$. Ora se tutti i corpi del sistema risalissero verticalmente colla velocità $V$, ciaschedun d' essi

salirebbe (I. 195) per l' altezza verticale $\frac{V^2}{2g}$, onde la salita del centro di gravità sarebbe $\frac{S.mV^2}{2gS.m}$. Mà abbiamo veduto (107) essere $S.mV^2 = 2gS.mz - 2gS.mZ$. Dunque ec.

Propose Ugenio questo Teorema, e se ne valse nella ricerca del centro d' oscillazione; ed appresso Daniele Bernulli da questo principio dedusse le leggi dell' Idrodinamica.

109. *Coroll. VIII.* Ritornando ad un sistema animato da qualsivoglia forze, suppongo che nel suo movimento esso venga a passare per quella situazione in cui se da principio fosse stato collocato, sarebbe rimasto in equilibrio. Giunto il sistema a questa situazione, quivi la sua forza viva sarà un massimo o un minimo. E viceversa.

Poichè nella situazion d' equilibrio la somma de' momenti delle forze (23) dev' essere eguale a zero, e per conseguenza $S.m\Phi$ sarà un massimo o un minimo. Dunque ancora lo sarà $S.mV^2$.

Così nel pendolo oscillante la forza viva è massima, quando il centro di gravità passa sotto il fulcro; minima quando passa al di sopra. Devesi questo Teorema al Signor Courtivron.

110. *Scolio I.* Tutti questi Teoremi sul conservarsi o alterarsi la forza viva d'un sistema che passa da una situazione ad un altra, si verificano nel supposto che durante questo passaggio non s'incontri verun ostacolo atto a cangiare subitamente d'una quantità finita le velocità de' corpi componenti il sistema. Poichè allora da un istante all'altro le differenze delle coordinate $x$, $y$, $z$ non sarebbono più infinitesime, ma finite. Nè potremmo più fare come prima (101) le variazioni $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ eguali a queste differenze: poichè il principio delle velocità virtuali, generalmente parlando, non ha luogo se non pei moti minimi, e per le variazioni infinitesime delle coordinate.

111. *Scolio II.* Egli è perciò che nell'urto de' corpi duri si fa una perdita di forza viva: poichè le velocità cangiano subitamente nella percossa. Se la velocità di ciascuna massa si decompone in due, l'una che si conserva dopo l'urto, l'altra che nell'urto si estingue; quella parte di forza viva che corrisponde a quest'ultima velocità viene a perdersi, conservandosi l'altra.

112. *Scolio III.* Ma nella percossa de' corpi elastici, cangiandosi la velocità per gradi minimi durante la compressione e la successiva restituzione delle parti, la legge delle forze vive avrà luogo. Se l'elasticità è per-

fetta, ogni particella si restituisce al punto donde partì, e però (104) la forza viva si riproduce qual era prima. Se imperfetta, non operandosi per intero la restituzione, dev' esservi perdita di forza viva.

113. *Proposizione IV.* Sia di nuovo il sistema da tali forze animato che ciascun trinomio $P\,d\,x + Q\,d\,y + R\,d\,z$ sia differenziale esatto. Nel tempo $t$ le masse $m$, $m'$, $m''$ ec. dài punti $A, B, C$ ec. passino ne' punti $a, b, c$ ec. per le curve $Aa$, $Bb$, $Cc$ ec. Dico che queste curve sono tali, che se ciascuna massa $m$ si moltiplica per l'integrale $\int V\,d\,s$ esteso dal punto di partenza $A$ sino al punto d'arrivo $a$, la somma di questi prodotti è un minimo.

Voglio dire che $\mathrm{S}.\,m\int V\,d\,s$ avrà minor valore che non avrebbe se i corpi descrivessero tutt' altre curve comprese fra gli stessi termini $A$ ed $a$, $B$ e $b$ ec.

Dim. Poichè (101)

$$\mathrm{S}.\,m\,V^2 = \text{cost.} + 2\,\mathrm{S}.\,m\,(P\,d\,x + Q\,d\,y + R\,d\,z)$$

avremo differenziando secondo $\delta$

$$\mathrm{S}.\,m\,V\,\delta\,V = \mathrm{S}.\,m\,(P\,\delta\,x + Q\,\delta\,y + R\,\delta\,z)$$

Ponendo questo valore nell' equazione ($B$) dell' art. 84, ed avvertendo essere $V dt = ds$, verrà

$$\mathrm{S}.\,m\,d\,s\,\delta\,V = \mathrm{S}.\,m\,(d\,u\,\delta\,x + d\,v\,\delta\,y + d\,w\,\delta\,z)$$

Altronde poichè $d\,s = \sqrt{(d\,x^2 + d\,y^2 + d\,z^2)}$ differenziando secondo $\delta$, e poi dividendo

per $dt$, troveremo

$$V\delta ds = u\delta dx + v\delta dy + w\delta dz = ud\delta x + vd\delta y + wd\delta z$$

e perciò ancora

$$S.m\,V\delta ds = S.m\,(u\,d\,\delta x + v\,d\,\delta y + w\,d\,\delta z)$$

Quindi avremo

$$S.m\,\delta\,(V ds) = S.(m\,ds\,\delta\,V + m\,V\,\delta\,ds) \cdot S.m\,d\,(u\,\delta\,x + v\,\delta\,y + w\,\delta\,z).$$ Ed'integrando

$$S.\int m\,\delta\,(V ds) = \delta\,S.m\int V\,ds = \text{cost.} + S.m\,(u\,\delta\,x + v\,\delta\,y + w\,\delta\,z).$$

Compio ora l'integrale, sicchè per ciascun corpo si estenda dal punto di partenza $A$ sino al punto d'arrivo $a$; ed allora è manifesto che se chiamerò $M'$ il valore che acquista $S.m\,(u\,\delta\,x + v\,\delta\,y + w\,\delta\,z)$ quando le coordinate corrispondono ai punti di partenza, ed $M''$ il valore che acquista quando corrispondono ai punti d'arrivo, sarà

$$\delta\,S.m\int V\,ds = M'' - M'.$$

Ma per ipotesi i punti di partenza $A$, $B$, $C$ ec. e i punti d'arrivo $a$, $b$, $c$ ec. sono fissi ed invariabili, poichè si paragonano tra loro le curve comprese fra quei termini. Dunque le variazioni delle coordinate $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ che corrispondono a quei punti, sono eguali a zero. Dunque $M' = M'' = 0$; e $\delta\,S.m\,V\,ds = 0$; e per conseguenza $S.m\int V\,ds$ è un minimo.

114. *Scolio.* Non possiamo prender equivoco nel dire che l'equazione precedente

indichi un minimo anzichè un massimo: poichè $\int V ds$ può crescere all'infinito, potendosi allungare all'infinito la strada che dal punto $A$ conduce al punto $a$.

115. *Coroll. I.* Applicando il Teorema al movimento d'un sol corpo isolato, avremo $\delta \int V ds = 0$. Onde impariamo questa singolar proprietà della trajettoria descritta da un punto mobile, che presi in essa due punti qualunque $A$, $a$, l'integrale $\int V ds$ per la curva $Aa$ è minore che non sarebbe per qualunque altra curva che congiungesse gli stessi termini $A$, $a$.

116. *Coroll. II.* Se il corpo non è stimolato da forze acceleratrici, sarà (105) $V$ costante, e diventerà $\delta s = 0$. Quindi esso si porterà dal punto $A$ al punto $a$ per la linea brevissima. E questa sarà evidentemente la linea retta, se il punto è libero: che se il punto si move sopra una superficie resistente, sarà la linea più breve che su quella superficie congiunge i punti $A$ ed $a$.

## CAP. III.

### *Del moto d'un punto.*

117. Poichè una massa, ogni elemento della quale sia sollecitato dalle forze $P$, $Q$, $R$

si move non altrimenti che un punto o atomo materiale sollecitato dalle stesse forze, quel che diremo in questo Capo circa il moto d'un punto, servirà eziandio pel moto d'un corpo animato in ogni suo elemento da forze uguali.

118. *Proposizione I.* Determinare il moto d'un punto libero.

L' equazione (*B*) somministra queste tre

$$P = \frac{d\,d\,x}{d\,t^2}\;;\; Q = \frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\;;\; R = \frac{d\,d\,z}{d\,t^2}$$

e queste ci determinano tutte le circostanze del moto.

Poichè 1.° moltiplicandole rispettivamente per $d\,x$, $d\,y$, $d\,z$, e sommando, avremo

$$V\,d\,V = P\,dx + Q\,d\,y + R\,d\,z$$

onde sapremo la velocità del mobile in ogni punto del suo cammino.

2.° Integrando le tre equazioni, avremo le coordinate $x$, $y$, $z$ espresse per $t$; onde sapremo il luogo del mobile ad ogni istante.

3.° Eliminando $t$, rimarranno due equazioni tra $x$, $y$, $z$, che saranno quelle della trajettoria, o della curva descritta dal mobile.

119. *Proposizione II.* Determinare il moto d' un punto obbligato a scorrere sopra una data superficie.

Sia l' equazione di questa superficie

$dx + m\,dy + n\,dz = 0$; e sia $K$ la pressione del mobile contro di essa, diretta secondo la normale $k$. Sarà (86) come se il corpo fosse libero, e sollecitato dalle forze $P$, $Q$, $R$, $-K$. Quest' ultima forza si risolva in tre dirette secondo $x$, $y$, $z$. Queste saranno (3) $-K\left(\frac{dk}{dx}\right)$, $-K\left(\frac{dk}{dy}\right)$, $-K\left(\frac{dk}{dz}\right)$;

ovvero scrivendo per brevità

$\sqrt{(1 + m^2 + n^2)} = M$, saranno (31) $-\frac{K}{M}$, $-\frac{mK}{M}$, $-\frac{nK}{M}$. Per il che l'equazione (B) ne darà queste tre

$$P - \frac{K}{M} = \frac{ddx}{dt^2};\; Q - \frac{mK}{M} = \frac{ddy}{dt^2};\; R - \frac{nK}{M} = \frac{ddz}{dt^2}.$$

Ora 1.° moltiplicandole rispettivamente per $dx$, $dy$, $dz$, ed avvertendo essere $dx + m\,dy + n\,dz = 0$, la loro somma darà tuttavia

$$V\,dV = P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

2.° Moltiplicandole similmente per 1, $m$, $n$, ed avvertendo essere $V\,dt = ds$, la loro somma darà

$$K = \frac{P + mQ + nR}{M} - \frac{V^2}{M} \cdot \frac{ddx + mddy + nddz}{ds^2}.$$

3.° Eliminando $K$, rimangono due equazioni tra le variabili $x$, $y$, $z$, $t$; alle qua-

li se si aggiunge l'equazion data della superficie, avremo tuttavia tre equazioni onde conseguire le coordinate $x$, $y$, $z$ espresse per $t$.

4.° E finalmente eliminando anche $t$, le due equazioni che restano tra $x$, $y$, $z$ determineranno la trajettoria.

120. *Coroll. I.* Se il corpo è obbligato a scorrere per una curva piana, di cui sia l'equazione $dx + m\,dy = 0$, potremo fare $R = 0$. E sarà

$$K = \frac{P + mQ}{M} - \frac{V^2}{M} \cdot \frac{ddx + m\,ddy}{ds^2}.$$

E poichè $m = -\frac{dx}{dy}$; $M = \frac{ds}{dy}$; ed il raggio osculatore $r = \frac{\mp ds^3}{dx\,ddy - dy\,ddx}$; diventa

$$K = \frac{P\,dy - Q\,dx}{ds} \mp \frac{V^2}{r}$$

Vale il segno superiore se la curva è concava verso l'asse; l'inferiore se è convessa.

Ove $K$ riesca positivo, ivi la direzione di questa forza farà angolo acuto colle $x$ positive; ed ove riesca negativo, lo farà ottuso. Dal che potremo ravvisare quando la pressione sospinga il corpo contro la curva, e quando lo stacchi dalla medesima, forzandolo ad abbandonarne la traccia.

121. *Coroll. II.* Per determinare la discesa d'un grave lungo una data curva, prese le $x$ verticali, faremo $Q = o$, e $P = \pm g$, secondo che prenderemo le $x$ rivolte al basso o all'alto. Quindi $V^2 = C \pm 2gx$; ove la costante $C$ si determinerà dalla nota velocità del mobile in qualche determinato punto. Poi sarà $K = \pm \frac{g\,dy}{ds} \mp \frac{V^2}{r}$. E finalmente l'equazione $V dt = \pm ds$ congiunta coll'equazione della curva, ci mostrerà gli altri accidenti del moto.

E viceversa date le condizioni del moto, potremo trovare la curva per cui dovrà scorrere il grave, affinchè le adempia. Ne recheremo in esempio alcuni fra' più noti problemi sulla caduta dei gravi per le curve.

122. *Esempio I.* Cada il grave pel convesso d'un arco circolare posto verticalmente, partendosi da un punto prossimo alla sommità del diametro verticale.

Prese le $x$ dalla sommità di questo diametro, e detto $a$ il raggio del circolo, sarà $y^2 = 2ax - x^2$, ed $r = a$. Quindi avremo $V^2 = 2gx$; e $K = \frac{g}{a}(a - 3x)$. Sin tanto che $3x < a$, $K$ rimane positivo, e la pressione fa forza contro la curva; ma tosto che $3x = a$, vien $K = o$, ed oltre quel limi-

te, diviene negativo. Da che si vede che il corpo scorrerà sul cerchio un arco di saetta uguale al terzo del raggio. Ivi giunto fuggirà per la tangente.

Il tempo della discesa si avrà dall'equazione $dt = \frac{a}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(2ax^2 - x^3)}}$. Sin tanto che l'arco è assai piccolo, può trascurarsi $x^3$, e viene $t = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{g}} \cdot \log. \frac{x}{\omega}$, essendo $\omega$ l'ascissa comunque piccola che corrisponde al punto dal quale il grave partì.

123. *Coroll. I.* Se il grave non parte dalla cima, ma da un punto più basso, cui corrisponda l'ascissa $b$, scorrerà un arco, la cui saetta sarà $= \frac{1}{3}(a - b)$. E più breve ancora sarà quest'arco, e più presto il corpo salterà fuori dalla curva, se esso non sarà partito dalla quiete, ma entri a percorrere il cerchio con una velocità altronde impressa.

124. *Coroll. II.* Esaminando similmente la caduta pel convesso d'un arco semicicloidale, se sia $\frac{1}{2}a$ il diametro del circolo generatore, si troverà che il grave partendo dal vertice scenderà per un arco di saetta $= \frac{1}{4}a$;

e partendo da un punto più basso cui corrisponda l' ascissa $b$, la saetta dell' arco percorso sarà $= \frac{1}{2} . \left( \frac{1}{2} a - b \right)$.

Il tempo della discesa si trova rigorosamente espresso da $t = \frac{a}{2\sqrt{g}} . \log. \frac{x}{b}$.

125. *Esempio II.* Cada un grave pel concavo d' un arco circolare posto verticalmente, arrivando all' estremità del diametro verticale.

Prese le $x$ dal punto infimo di questo diametro, e chiamando $b$ l' ascissa del punto onde si spicca il grave, avremo $V^2 = 2g(b-x)$; e $K = -\frac{g}{a}(a + 2b - 3x)$. Quindi $K$ è sempre negativo; e perciò appunto la pressione facendo sempre angolo ottuso colle $x$, sospinge sempre il mobile contro la curva. Minima è la pressione nel punto di partenza, ove $K = -\frac{g}{a}(a - b)$; massima nel punto infimo, ove $K = -\frac{g}{a}(a + 2b)$.

Per avere il tempo della discesa, conviene integrare per serie l' equazione

$$dt = -\frac{a\,dx}{\sqrt{2g(b-x)(2ax - x^2)}}$$

Si ottiene una serie convergente, scrivendo l'equazione così

$$dt = -\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{g}} \cdot \frac{dx\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(bx-x^2)}}$$

e svolgendo il numeratore colla serie Neutoniana del binomio. Così $dt$ viene espresso da una serie di termini, tutti della forma $\frac{-A^n dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}$. L'integrale di ciascun termine dipende dall'integrale di $\frac{-dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}$, il quale preso da $x=b$ sino ad $x=0$, è $=\pi$. Con questo progresso si trova $t = \frac{\pi\sqrt{a}}{2\sqrt{g}} \times$

$$\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{b}{2a}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{b^2}{4a^2}+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\frac{b^3}{8a^3}+\ldots\right\}$$

126. *Coroll. I* Quest' Esempio comprende palesemente il moto de' pendoli che oscillano per archi circolari. La serie pur ora esposta esprime il tempo della mezza oscillazione, che per gli archi piccioli diventa costante, ed $= \frac{\pi\sqrt{a}}{2\sqrt{g}}$. E il valore di $K$ mostra la tensione del filo in ciascun punto dell' arco.

127. *Coroll. II.* Per la discesa d'un grave lungo il concavo d'un arco cicloidale,

troveremo $K = -\frac{g}{\sqrt{a}} \cdot \frac{a + 2b - 4x}{\sqrt{(a - 2x)}}$; onde nel punto infimo il valore di $K$ riesce lo stesso che nell' arco circolare. Ma il tempo della discesa si troverà rigorosamente $= \frac{\pi\sqrt{a}}{2\sqrt{g}}$ qualunque siasi l'ampiezza dell'arco descritto: nel che appare il tautocronismo della cicloide.

128. *Esempio III.* Trovar quella curva, per cui cadendo un grave eserciti contro di essa una pression costante $= gA$.

Detta $h$ l'altezza dovuta alla velocità iniziale del mobile, sarà $V^2 = 2g(h + x)$. L' equazione della cercata curva sarà $K = gA$, o sia

$$\frac{dy}{ds} \mp \frac{2(h + x)}{r} = A.$$

Prendasi $ds$ per costante, e sarà $r = \mp \frac{dxds}{ddy}$. Sostituito questo valore, e divisa l'equazione per $2\sqrt{(h + x)}$, essa diventerà integrabile, e darà

$$dy\sqrt{(h + x)} = A\,ds\sqrt{(h + x)} + B\,ds$$

essendo $B$ una costante, che si determinerà quando si conosca la direzione iniziale del mobile. Facciasi per brevità $= X$ il coefficiente del $ds$, ed avremo fra $x$ ed $y$ l'equazion separata

$$dy = \frac{X\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

129. *Coroll.* Se $h = 0$, viene necessariamente $B = 0$, e la linea d'egual pressione diventa una retta inclinata alla verticale coll'angolo il di cui seno è $= A$. Che se cercassimo la curva che dal grave cadente per essa non fosse punto premuta, fatto $A = 0$, ritroveremmo la parabola.

130. *Esempio IV.* Parta il grave con velocità dovuta all'altezza $h$, e con direzion verticale all'ingiù. Cerco la curva per la quale dovrà incamminarsi, affinchè in tempi eguali discenda per eguali altezze verticali.

Sarà $V^2 = 2g(h + x)$. E perchè il tempo della discesa per l'arco $s$ dee essere proporzionale all'ascissa verticale $x$, e però $dt$ proporzionale a $dx$, dovrà essere $ds$ proporzionale ad $V dx$, e precisamente $ds\sqrt{2gh} = V dx$, giacchè nel principio del moto, quando $V = \sqrt{2gh}$, abbiamo $ds = dx$. Sostituendo il valore di $V$, e quadrando, avremo l'equazione della cercata curva $h\,dy^2 = x\,dx^2$, ed integrando $9hy^2 = 4x^3$. Questa è la parabola cubica, cui per tale proprietà Leibnizio diede il nome di curva isocrona.

131. *Esempio V.* Partendo il grave con velocità dovuta all'altezza $h$, cerco la curva per cui dovrà discendere, affinchè in tempi

eguali si scosti per eguali intervalli dal punto di partenza.

Qui il tempo della discesa per l'arco $s$ dovrà esser proporzionale alla sua corda. Tornerà più comodo cambiare le coordinate, determinando ciascun punto della curva per mezzo della corda, che chiamerò $z$, e dell' angolo $u$ che fa questa corda colla verticale. Col che avrò $x = z \cos. u$; $ds^2 = dz^2 + z^2 du^2$; $V^2 = 2g(h + z \cos. u)$.

Ora dovendo per la condizion del problema essere $t$ proporzionale a $z$, dovrà anche essere $dt$ proporzionale a $dz$, o sia $ds$ proporzionale ad $V dz$, e precisamente $ds \sqrt{2gh} = V dz$, giacchè nel principio del moto, quando $V = \sqrt{2gh}$, abbiamo $ds = dz$. Sostituendo il valore di $V$, e quadrando, viene $h z du^2 = dz^2 \cos. u$; o sia $\frac{dz}{\sqrt{hz}} = \frac{du}{\sqrt{\cos. u}}$.

Tale è l'equazion della curva, cui Leibnizio impose il nome d' Isocrona Paracentrica, e che i fratelli Bernulli insegnarono a costruire colla rettificazione della lemniscata, o ellisse Cassiniana.

132. *Esempio VI.* Trovare quella curva per cui un grave partendo dalla quiete percorre un arco qualunque nello stesso tempo nel quale ne percorrerebbe la corda.

Il tempo della discesa per l' arco $s$, è

$= \int \frac{ds}{V} = \int \frac{ds}{\sqrt{2gx}}$. Il tempo della discesa per la corda $z$, si troverà (I. 234) $= \frac{2z}{\sqrt{2gx}}$. Eguagliando fra loro i differenziali di questi tempi, si trova $ds = 2dz - zdx$. Ridotta quest' equazione fra le variabili $x$ ed $y$, diventa omogenea, ed integrata porge $2z^4 = a^2 xy$; essendo $a$ una costante.

Appartiene questa equazione alla poc' anzi mentovata Ellisse Cassiniana; o Lemniscata, posta coll' asse $a$ inclinato alla verticale con angolo semiretto, e prese le ascisse sulla tangente, che allora appunto riesce verticale.

133. *Esempio VII.* Tra due dati punti trovare la curva Brachistocrona; o sia quella per cui il grave nel più breve tempo discenda dal punto superiore all' inferiore.

Dovrà dunque il tempo della discesa essere un minimo: e però dovrà esserlo l' integrale $\int \frac{ds}{\sqrt{x}}$ esteso dal punto di partenza al punto d' arrivo. Pongasi pertanto $\delta S. \frac{ds}{\sqrt{x}} = S. \delta \frac{ds}{\sqrt{x}} = 0$; ove facendo variare solamente la $y$, ed eguagliando a zero il coefficiente di $\delta y$, avremo $d. \frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0$,

onde $dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$; equazione d'una cicloide posta colla base orizzontale, e generata da un cerchio del diametro $a$. Se dunque sopra l'orizzontale del punto di partenza si descrive una cicloide pei due punti dati, sarà quella la cercata brachistocrona.

## CAP. IV.

### *Del Moto d'un sistema rigido.*

#### Art. I. *Degli Assi principali d'un sistema rigido.*

134. Quest'Articolo servirà di supplemento a ciò che si disse negli Elementi intorno al Momento d'inerzia; ed agevolerà la strada alla determinazione del moto d'un sistema rigido. Riferito il sistema ai tre assi ortogonali (Fig. 14) $OX$, $OY$, $OZ$ delle coordinate $x, y, z$, chiameremo $dM$ l'elemento della massa, e faremo per brevità $S.x^2dM = A$; $S.y^2dM = B$; $S.z^2dM = C$; $S.xydM = D$; $S.xzdM = E$; $S.yzdM = F$ onde il momento d'inerzia del sistema rispetto dell'asse $OX$ sarà $S.(y^2+z^2)dM = B+C$, e così i momenti d'inerzia per gli altri due assi $OY$, $OZ$ saranno $A+C$, $A+B$.

135. *Proposizione I.* Dati i momenti d'in-

erzia pei tre assi $OX$, $OY$, $OZ$, trovare il momento d' Inerzia per un asse qualunque $OG$ condotto per l' origine $O$.

Sia $OF$ la projezione di $OG$ sul piano $XOY$, e siano gli angoli $XOF = p$, $FOG = q$. Sia nel punto $M$ l' elemento $dM$ determinato dalle coordinate $OP = x$, $PQ = y$, $QM = z$. Condotta sul piano $XOY$ la $QR$ perpendicolare ad $OF$, mutiamo le coordinate, facendole $OR = x'$, $RQ = y'$, $QM = z'$. E sarà

$$x' = OQ \cos.(POQ - p) = x \cos. p + y \sin. p$$
$$y' = OQ \sin.(POQ - p) = y \cos. p - x \sin. p$$
$$z' = z.$$

Compiasi il rettangolo $RQMT$, si conduca la $TS$ perpendicolare ad $OG$, e compiuto ancora l' altro rettangolo $MTSK$, mutiamo di nuovo le coordinate, facendole $OS = x''$, $SK = y''$, $KM = z''$. E sarà

$$x'' = OT \cos.(ROT - q) = x' \cos. q + z' \sin. q$$
$$y'' = y'$$
$$z'' = OT \sin.(ROT - q) = z' \cos. q - x' \sin. q$$

Sostituendo quivi i valori precedenti di $x'$, $y'$, $z'$ e poi ricavandone il valore di $y''^2 + z''^2$, avremo il momento d' inerzia per l' asse $OG$; il quale se dicasi $\Sigma$, troveremo $\Sigma = S.(y''^2 + z''^2)\, d.M =$

$$A(\sin.p^2 + \cos.p^2 \sin.q^2) + B(\cos p^2 + \sin.p^2 \sin.q^2)$$
$$+ C \cos.q^2 - 2D \sin. p \cos. p \cos. q^2$$
$$- 2E \cos. p \sin. q \cos. q$$
$$- 2F \sin. p. \sin q \cos. q.$$

136. *Corollario*. Cogli stessi dati si potranno pur calcolare le somme $S.x''y''dM$, $S.x''z''dM$; e confrontando i valori di queste somme col valor trovato di $\Sigma$, si vedrà essere $S.x''y''dM = -\frac{1}{2\cos.q}\left(\frac{d\Sigma}{dp}\right)$;

$$S.x''z''dM = -\frac{1}{2}\left(\frac{d\Sigma}{dq}\right).$$

137. *Proposizione II*. Fra tutti gli assi condotti per l'origine $O$, trovare quell' asse $OG$ cui competa il momento d'inerzia massimo, o il minimo.

Sciogliesi questo Problema colle due equazioni $\left(\frac{d\Sigma}{dp}\right) = 0$; $\left(\frac{d\Sigma}{dq}\right) = 0$

Differenziando adunque il valore di $\Sigma$ (135) separatamente rispetto alle due variabili $p$, $q$, ed eguagliando a zero entrambi i differenziali, avremo due equazioni per determinare i due angolí $p$, $q$ che fissano la posizione dell' asse ricercato.

Eliminando $q$, rimane per determinare l' angolo $p$ un equazion cubica assai complicata, che avrà questa forma (a)

$$A'\text{tang.}p^3 + B'\text{tang.}p^2 + C'\text{tang.}p + D' = 0.$$

---

(a) *V. Euler Theoria motus corporum solidorum*, art. 438.

138. *Coroll. I.* Quest' equazione, siccome cubica, avrà certo una radice reale. Dovrà anzi averne due; poichè essendo il momento d'inerzia per ogni asse quantità positiva, se v'ha un asse che dia il momento massimo, dovrà per necessità esserne un altro che dia il minimo; e viceversa.. Che se due radici sono reali, non potrà non esserlo anche la terza. La nostra equazione avrà dunque tutte tre le radici reali; e però indicherà, generalmente parlando, tre assi.

139. *Coroll. II.* Ma non a tutti tre questi assi potrà convenire la qualità del massimo, o minimo momento; che anzi se uno dà assolutamente il momento massimo, e l'altro il minimo, il terzo non potrà dare nè l'un nè l'altro. E già è noto che dall' essere il differenziale d'una funzione eguale a zero, non sempre si conchiude il massimo o il minimo.

140. *Coroll. III.* Bensì converrà a tutti tre gli assi la proprietà, che il differenziale del loro momento d'inerzia è uguale a zero; vale a dire che un minimo cangiamento nella situazione dell'asse per qualunque verso, non cangia punto il valore del momento d'inerzia.

141. *Coroll. IV.* Portano questi assi il nome di *Assi principali* del sistema. Asse principale è dunque quello per cui il diffe-

renziale del momento d' inerzia è nullo. E si vede che per ciascun punto del sistema ponno condursi tre assi dotati di questa proprietà.

142. *Coroll. V.* L' equazioni $\left(\frac{d\Sigma}{dp}\right)=0$, $\left(\frac{d\Sigma}{dq}\right)=0$ per le quali si determinano gli assi principali, traggon seco quest' altre due (136) $S.x''y''dM=0$, $S.x''z''dM=0$. Dunque ogni asse principale ha questa proprietà, che se in esso si prendono le ascisse $x$, sarà $S.xydM=0$, $S.xzdM=0$. E viceversa.

143. *Coroll. VI.* Se il sistema è simmetrico attorno l' asse $OG$, sarà $OG$ un asse principale.

Poichè prese le $x$ sull' asse $OG$, per ogni elemento $dM$ determinato dalle coordinate $x$, $y$ vi ne sarà un altro eguale, determinato dalle coordinate $x$, $-y$. Onde si vede che sarà $S.xydM=0$. E nello stesso modo si troverà essere $S.xzdM=0$. Dunque ec.

144. *Scolio*. Cercare gli assi principali d' un sistema per via dell' equazion cubica (137) sarebbe fatica improba: ma ne' sistemi simmetrici, il Corollario precedente ne indicherà almeno uno di questi assi. E co-

noscendone uno, facilmente si scoprono gli altri due per via della seguente

145. *Proposizione III.* Dato un asse principale, trovar gli altri due.

Sia $OX$ l'asse principale conosciuto. Prese su quello le $x$, potremo fare (142) $D = E = 0$. Ora per trovare un altro asse dotato della stessa proprietà, nel valore di $\Sigma$ (135) che esprime il momento d'inerzia d'un asse qualunque, pongo $D = E = 0$, e poi ne ricavo le due equazioni $\left(\frac{d\,\Sigma}{d\,p}\right) = 0$, $\left(\frac{d\,\Sigma}{d\,q}\right) = 0$, le quali per la determinazione degli angoli $p$, $q$, daranno l'equazioni seguenti

$$\cos.\,p = 0 \qquad \text{tang.}\,2\,q = \frac{2\,F}{B - C}$$

La prima dà $p = 90°$. La seconda, se chiamo $2\,i$ l'angolo che ha per tangente $\frac{2\,F}{B - C}$, dà per determinar l'angolo $q$ questi due valori $q = i$, $q = i + 90°$.

Quindi gli altri due assi principali compagni dell' $OX$ saranno 1.° $Oy$ condotto sul piano $YOZ$ ad angolo $YOy = i$. 2.° $Oz$, che sullo stesso piano fa l'angolo $YOz = i + 90°$.

146. *Coroll. I.* Adunque i tre assi principali sono fra loro perpendicolari.

147. *Coroll. II.* Se prendiamo sugli assi principali le coordinate $x$, $y$, $z$ avremo

$S . xydM = 0$ ; $S . xzdM = 0$ ; $S . yzdM = 0$
e se di più collochiamo l'origine nel centro di gravità del sistema, avremo ancora
$S . x\,d\,M = 0$ ; $S . y\,d\,M = 0$ ; $S . z\,d\,M = 0$

148. *Proposizione IV.* Dati i momenti d'inerzia pei tre assi principali, trovare il momento d'inerzia per un asse qualunque condotto per la loro origine.

Siano i tre assi principali $OX$, $OY$, $OZ$, e i loro momenti d'inerzia $A'$, $B'$, $C'$. E l'asse $OG$ faccia cogli assi principali gli angoli $COX = f$, $GOY = g$, $GOZ = h$. Sarà per l'asse $OG$ il momento d'inerzia

$$\Sigma = A' \cos. f^2 + B' \cos. g^2 + C' \cos. h^2 .$$

Dim. Prendendo le coordinate sugli assi principali, potremo (147) nel valore di $\Sigma$ (135) porre $D = E = F = 0$. Ed in luogo delle altre lettere $A$, $B$, $C$ (134) ponendo i loro valori dati dall'equazioni

$$B + C = A' \;;\; A + C = B' \;;\; A + B = C'$$

verrà

$$\Sigma = A' \cos. p^2 \cos q^2 + B' \sin. p^2 \cos. q^2 + C' \sin. q^2$$

Ora è $\cos. p \cos. q = \cos. GOX = \cos. f$

$\sin. p \cos. q = \cos. GOY = \cos. g$

$\sin. q = \cos. GOZ = \cos. h$.

Dunque ec.

149. *Coroll. I.* Poichè i tre assi principali sono ortogonali sarà

$\cos. f^2 + \cos. g^2 + \cos. h^2 = 1$. Onde dei

tre angoli $f$, $g$, $h$ bastano due per fissare la posizione dell' asse $OG$.

150. *Coroll. II.* Quindi il valore di $\Sigma$ può esprimersi anche in questa guisa

$$\Sigma = A' - (A' - B')\cos. g^2 - (A' - C')\cos. h^2;$$

ovvero

$$\Sigma = C' + (A' - C')\cos. f^2 + (A' - B')\cos. g^2$$

Sia $A' > B' > C'$: apparisce tosto che sarà $A' > \Sigma > C'$. Onde si conferma che il momento d' inerzia d' ogni asse è compreso fra il massimo $A'$ ed il minimo $C'$ competenti a due assi principali.

151. *Coroll. III.* Può avvenire che fra i momenti degli assi principali, ve ne siano due eguali fra loro. Siano questi i momenti degli assi $OX$, $OY$, onde sia $A' = B'$. Allora diventa

$$\Sigma = A'(1 - \cos. h^2) + C'\cos. h^2$$

il qual valore viene $= A'$, quando $h = 90°$. Dunque tutti gli assi condotti nel piano $XOY$ avranno eguali momenti d' inerzia.

152. *Coroll. IV.* Può anche avvenire che i momenti degli assi principali siano tutti tre eguali fra loro; onde $A' = B' = C'$. Allora diventa $\Sigma = A'$, e tutti gli assi hanno lo stesso momento d' inerzia.

153. *Coroll. V.* Di qui si vede che gli assi principali che ponno condursi per un punto qualunque del sistema, sono sempre o

in numero di tre, o in numero infinito.

154. *Scolio*. Per le cose sin qui dette agevolmente si ravvisano gli assi principali delle figure più semplici. Nel parallepipedo rettangolo gli assi principali condotti pel centro di gravità sono tre rette parallele ai lati. Nella sfera ogni diametro può aversi per un asse principale. Nel cerchio, così per la periferia, come per l'area, uno degli assi principali è una retta elevata sul centro normale al piano del cerchio; gli altri due sono due diametri qualunque, che si taglino ad angolo retto: poichè ogni diametro essendo similmente posto rispetto al cerchio, ha egual momento d'inerzia. Similmente nei solidi di rivoluzione, l'asse medesimo di rivoluzione è uno de' principali, e gli altri due sono due rette qualunque perpendicolari all'asse, che si taglino ad angolo retto.

155 *Proposizione V.* Trovare il momento d'inerzia della periferia circolare rispetto d'un diametro.

Sia il raggio $= a$. L'elemento essendo $ds = \frac{a\,dx}{y}$, e la sua distanza dal diametro essendo $= y$, sarà il momento elementare $= a\,y\,dx$, ed il momento totale

$$= a\int y\,dx = \pi a^3 = \frac{1}{2} M a^2 .$$

156. *Coroll. I.* Di qui si passa agevolmente a trovare il momento d'inerzia dell'area circolare rispetto d'un diametro. Prendasi per elemento dell'area la zona compresa tra le ascisse $x$, $x + dx$, e sarà (155) il momento elementare $= \pi x^2 dx$. Integrando, e facendo $x = a$, avremo il momento totale $= \frac{1}{4} \pi a^4 = \frac{1}{4} M a^2$.

Che se volessimo il momento d'inerzia rispetto d'un asse parallelo al diametro, e distante da esso per l'intervallo $k$, questo sarebbe (I. 265) $= \frac{1}{4} \pi a^4 + \pi a^2 k^2$.

157. *Coroll. II.* Più oltre potremo in ogni solido di rivoluzione assegnare i momenti d'inerzia competenti agli assi principali. Già per l'asse di rivoluzione si trovò (I. 273) il momento $= \frac{1}{2} \pi \int y^4 dx$. Gli altri due assi hanno momenti eguali, che ora determineremo. Si consideri un asse principale condotto pel vertice del solido normalmente all'asse di rivoluzione; su cui si prendono le $x$. E per elemento del solido prendasi la falda frapposta alle ascisse $x, x + dx$. Questa può aversi per un cerchio di raggio $y$, distante dall' asse principale per l'intervallo $x$. Quindi (156) il momento d'inerzia ele-

mentare sarà $\frac{1}{4}\pi y^4 dx + \pi x^2 y^2 dx$. Ed il momento totale $= \frac{1}{4}\pi\int y^4 dx + \pi\int x^2 y^2 dx$.

Che se vogliamo considerare gli assi principali condotti pel centro di gravità del solido, e sia $X$ l'ascissa del centro di gravità, il momento d'inerzia competente all'asse di rivoluzione rimarrà come prima; ma il momento d'inerzia per ciascuno dei due diametri normali all'asse, diventerà (I. 265)

$$\frac{1}{4}\pi\int y^4 dx + \pi\int x^2 y^2 dx - MX^2.$$

158. *Coroll. III.* Pel cilindro, pel cono, e per la sfera, trovammo altrove (I. 274) il momento d'inerzia riferito all'asse di rivoluzione. Ora aggiungeremo il valore del momento d'inerzia degli stessi solidi riferito a un diametro condotto pel centro di gravità normalmente all'asse; ritenendo le stesse denominazioni d'allora.

1.° Pel cilindro, $S = \frac{1}{4}Ma^2 + \frac{1}{12}Mb^2$

2.° Pel cono, $S = \frac{3}{20}Ma^2 + \frac{3}{80}Mb^2$

3.° Per l'emisfero, $S = \frac{83}{320}Ma^2$

4.° Per l'ellissoide, essendo $a$ il semiasse

di rivoluzione, $b$ il semiasse conjugato, il momento d'inerzia rispetto del primo è

$S = \frac{2}{5} M b^2$; e rispetto del secondo

$S = \frac{1}{5} M (a^2 + b^2)$.

Art. II. *Formole che rappresentano il moto rotatorio d'un sistema attorno un punto.*

159. Poichè un sistema rigido non può avere altri moti fuorchè il progressivo ed il rotatorio, ed il primo di questi sappiamo già rappresentare analiticamente, resta che veggiamo con quali formole possa rappresentarsi il secondo.

160. *Proposizione I.* Pongasi che il sistema giri nello stesso tempo attorno i tre assi ortogonali delle coordinate $OX$, $OY$, $OZ$ (Fig. 15) colle velocità angolari $p$, $q$, $r$ rispettivamente; così che nell'istante $dt$ descriva attorno questi assi gli angoli minimi $pdt$, $qdt$, $rdt$. Si vuol esprimere il cangiamento di luogo d'un punto $M$ del sistema nell'istante $dt$.

Si consideri dapprima la rotazione $rdt$ attorno l'asse $OZ$ da $X$ verso $Y$. Sia $OQ$ la projezione della $OM$ sul piano $XOY$. Il punto Q scorrerà nell'istante $dt$ l'archet-

to $Qq = OQ . rdt$; ed il punto $M$ scorrerà un archetto eguale e parallelo a questa $Qq$. Le coordinate del punto $M$ sono $OP = x$, $PQ = y$, $QM = z$, ed i triangoli simili $OPQ$, $qQr$ danno

$$OQ : Qq :: OP : qr :: PQ : Qr ; \text{ o sia}$$
$$1 : rdt :: x : dy :: y : -dx$$

Onde avremo per questa rotazione

$$dx = -rydt \; ; \; dy = rxdt \; ; \; dz = o.$$

Appresso si consideri la rotazione $pdt$ attorno l'asse $OX$ da $Y$ verso $Z$. Sia $OC$ la projezione della $OM$ sul piano $YOZ$. Il punto $C$ scorrerà l'archetto $Cc = OC . pdt$; ed il punto $M$ scorrerà un archetto eguale e parallelo a $Cc$. Ed essendo le coordinate di $M$, $OB = y$, $BC = z$, $CM = x$, i triangoli simili $OBC$, $cCs$ daranno

$$OC : Cc :: OB : cs :: BC : Cs ; \text{ o sia}$$
$$1 : pdt :: y : dz :: z : -dy$$

Onde per questa rotazione sarà

$$dx = o \; ; \; dy = -pzdt \; ; \; dz = pydt \; ;$$

Per ultimo si consideri la rotazione $qdt$ fatta attorno l'asse $OY$ da $Z$ verso $X$. Sia $ON$ la projezione della $OM$ sul piano $ZOX$. Il punto $N$ descriverà l'archetto $Nn = ON . qdt$; ed il punto $M$ scorrerà un archetto eguale e parallelo ad $Nn$. Essendo le coordinate di $M$, $OL = z$, $LN = x$, $NM = y$, avremo pei triangoli simili $OLN$, $nNt$

$$ON : Nn :: OL : nt :: LN : Nt ; \text{ o sia}$$
$$1 : qdt :: z : dx :: x : -dz$$

e sarà per questa rotazione

$$dx = qz\,dt\,;\; dy = 0\,;\; dz = -qx\,dt\,.$$

E facendosi tutte tre le rotazioni insieme, sarà

$$(C)\quad \begin{aligned} dx &= dt\,(qz - ry) \\ dy &= dt\,(rx - pz) \\ dz &= dt\,(py - qx) \end{aligned}$$

161. *Coroll. I.* Si conduca per $O$ la retta $OG$ determinata da questa proporzione

$$x : y : z :: p : q : r$$

Sarà per ciascun punto di questa retta $dx = 0$, $dy = 0$, $dz = 0$. Adunque per l' istante $dt$ la retta $OG$ resterà immota, e tutto il sistema non farà che rivolgersi intorno ad essa. Per questa proprietà dicesi la $OG$ *Asse istantaneo della rotazione*.

162. *Coroll. II.* Facilmente si determina la posizione di questo Asse istantaneo. Siano $f$, $g$, $h$ gli angoli che esso fa cogli assi $OX$, $OY$, $OZ$; e facciasi per brevità $\sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)} = V$. Sarà

$$\cos. f = \frac{p}{V}\;;\; \cos. g = \frac{q}{V}\;;\; \cos. h = \frac{r}{V}.$$

163. *Coroll. III.* E la velocità angolare di questa rotazione istantanea attorno $OG$, sarà $= V$.

In fatti condotta la perpendicolare $PK$ sopra $OG$, sarà $PK = OP \sin. f = (162)$ $\frac{x}{V}\sqrt{(q^2 + r^2)}$. Ora pel punto $P$ abbiamo

$y=0$, $z=0$, è per conseguenza (160) $dx=0$, $dy=rxdt$, $dz=-qxdt$. Dunque la velocità del punto $P$ sarà

$$=\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{dt}=x\sqrt{(q^2+r^2)}.$$

E la velocità angolare attorno $OG$ sarà

$$=\frac{x\sqrt{(q^2+r^2)}}{PK}=V.$$

164. *Coroll. IV.* Tre rotazioni $pdt$, $qdt$, $rdt$ che insieme si facciano attorno tre assi ortogonali, equivalgono ad una rotazione unica $dt\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}$ attorno un asse che farà coi tre primi gli angoli de' coseni

$$\frac{p}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}},\ \frac{q}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}},\ \frac{r}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}}$$

E viceversa una rotazione $Vdt$ attorno un dato asse, equivale a tre rotazioni simultanee $Vdt$ cos. $f$, $Vdt$ cos. $g$, $Vdt$ cos. $h$ attorno tre assi ortogonali, che faccian con quello gli angoli de' coseni $f$, $g$, $h$.

165. *Coroll. V.* Qui di nuovo ci si dimostra quello che in altra guisa (I. 99) si dimostrò negli Elementi: che impedita la rotazione attorno tre assi ortogonali, è impedita ad un sistema rigido la rotazione attorno qualsivoglia altro asse, che passi per la loro origine.

166. *Proposizione II.* Pongasi che gli assi

$OX$, $OY$, $OZ$ siano fissi nel sistema, di modo che facendosi le tre rotazioni come nella Proposizione antecedente, ciascheduno degli assi come $OX$ giri insieme col sistema attorno gli altri due. Si vuol esprimere il cangiamento di luogo dei tre assi nell' istante $dt$.

Comodamente si rappresentano questi cangiamenti di sito per mezzo della Trigonometria sferica. Intendasi col centro $O$, e col raggio $=1$ descritta nello spazio una sfera (Fig. 16) e siano $X$, $Y$, $Z$ i punti della sua superficie per dove passano gli assi $OX$, $OY$, $OZ$. Essendo questi assi ortogonali, gli archi $XY$, $YZ$, $ZX$ saranno quadranti di cerchio massimo, e si taglieranno ad angoli retti. Preso ad arbitrio fra i circoli massimi della sfera un circolo fisso $ATB$, e fissato in esso parimente ad arbitrio un punto $T$, siano gli archi $TX=l$, $TY=m$, $TZ=n$, e gli angoli $BTX=\lambda$, $BTY=\mu$, $BTZ=\nu$. Ora facendosi congiuntamente le tre rotazioni $pdt$, $qdt$, $rdt$ attorno gli assi $OX$, $OY$, $OZ$ si vuol sapere quale spazietto descriveranno nell' istante $dt$ i punti $X$, $Y$, $Z$, e come varieranno gli angoli $l$, $m$, $n$, $\lambda$, $\mu$, $\nu$.

Si cerchi da prima il movimento del punto $X$. Per la rotazione $pdt$, che si fa sullo stesso polo $X$, esso non si moverà punto,

onde sarà per questa rotazione

$$d\,l = 0 \qquad d\,\lambda = 0$$

Per la rotazione $q\,d\,t$ che si fa sul polo $Y$, il punto $X$ descriverà un archetto $XQ = q\,d\,t$, normale ad $YX$. E conducendo $QR$ perpendicolare a $TX$, sarà

$$XR = XQ \cos.\, TXQ$$

$$= - XQ \cos.\, TXZ = - q\,d\,t\,\frac{\cos.\, n}{\sin.\, l}$$

$$QR = XQ \sin.\, TXQ$$

$$= XQ \cos.\, TXY = q\,d\,t\,\frac{\cos.\, m}{\sin.\, l}$$

Ma $XR = -dl$, e l'archetto $QR$ è la misura dell'angolo $QTX$ in un cerchio che abbia per raggio sin. $TX$, onde $QR = -d\lambda \sin. l$. Dunque sarà per questa seconda rotazione

$$d\,l = q\,d\,t\,\frac{\cos.\, n}{\sin.\, l}\;;\; d\,\lambda = - q\,d\,t\,\frac{\cos.\, m}{\sin.\, l^2}$$

In egual modo per la rotazione $r\,d\,t$ che si fa sul polo $Z$ troveremo

$$d\,l = r\,d\,t\,\frac{\cos.\, m}{\sin.\, l}\;;\; d\,\lambda = - r\,d\,t\,\frac{\cos.\, n}{\sin.\, l^2}$$

E facendosi tutte tre le rotazioni insieme avremo per lo spostamento del polo $X$ le due equazioni

$$d\,l \sin.\, l = d\,t\,(q \cos.\, n - r \cos.\, m)$$

$$d\,\lambda \sin.\, l^2 = - d\,t\,(q \cos.\, m + r \cos.\, n)$$

Alla stessa guisa si esprimeranno le trasla-

zioni degli altri due poli $Y$, $Z$. Onde si avranno tra gli angoli $l$, $m$, $n$, $\lambda$, $\mu$, $\nu$, queste sei equazioni

$$(D)\begin{cases} d\,l \text{ sin. } l = d\,t\,(q \cos. n - r \cos. m) \\ d\,m \text{ sin. } m = d\,t\,(r \cos. l - p \cos. n) \\ d\,n \text{ sin. } n = d\,t\,(p \cos. m - q \cos. l) \end{cases}$$

$$(E)\begin{cases} d\,\lambda \text{ sin. } l' = - d\,t\,(q \cos. m + r \cos. n) \\ d\,\mu \text{ sin. } m' = - d\,t\,(r \cos. n + p \cos. l) \\ d\,\nu \text{ sin. } n' = - d\,t\,(p \cos. l + q \cos. m) \end{cases}$$

167. *Scolio I.* Dei tre angoli $l$, $m$, $n$ basterà dall'equazioni $(D)$ ricavarne due; che il terzo ci si paleserà dall'essere

$$\cos. l^2 + \cos. m^2 + \cos. n^2 = 1.$$

E degli altri tre $\lambda$, $\mu$, $\nu$ basterà dall'equazioni $(E)$ ricavarne uno solo; che gli altri due ci si paleseranno dall'essere

$$\cos. (\mu - \lambda) = - \cot. l \cot. m$$
$$\cos. (\nu - \mu) = - \cot. m \cot. n.$$

168. *Scolio II.* Per le formole raccolte in quest'articolo, conoscendo noi le tre velocità $p$, $q$, $r$ colle quali si rivolge il sistema attorno tre assi ortogonali, conosceremo la situazione di ogni suo punto ad ogni istante: sia per mezzo dell'equazioni $(C)$ se quei tre assi sono fissi nello spazio, sia per le equazioni $(D)$ $(E)$ se dessi sono mobili insieme col sistema.

### Art. III. *Determinazione del moto d' un sistema rigido.*

169. Come l' equilibrio, così anche il moto d' un sistema rigido si determina generalmente e compiutamente per sei equazioni e non più. E queste sono per riguardo al moto le tre equazioni dell' art. 88. e le tre dell' art. 94. tutte sei derivate dall' equazion fondamentale ($B$). Le prime tre ci mostrano che il centro di gravità del sistema così si muove come se tutta la massa vi fosse raccolta, e tutte le forze vi fossero immediatamente applicate; onde questo cammino del centro di gravità si determina non altrimenti che quello d' un punto sollecitato da forze date. Determinato il viaggio del centro di gravità, non può rimanere altro moto al sistema, se non che una rotazione intorno a quel centro. E questa rotazione si determina per le tre equazioni dell' art. 94. siccome tosto vedremo.

170. *Proposizione I.* Date le forze accelelatrici $P$, $Q$, $R$ sollecitanti ciascun elemento $dM$, determinare la rotazion del sistema attorno il suo centro di gravità.

Prendasi il centro di gravità per origine, e i tre assi principali $OX$, $OY$, $OZ$ (Fig. 15) per esso condotti si prendano per assi delle

$x$, $y$, $z$. Si dicano $F$, $G$, $H$ le somme de' momenti delle forze per aggirare il sistema attorno gli assi $OX$, $OY$, $OZ$ rispettivamente, per verso $XYZ$. Di modo che sarà

$$F = \text{S} . dM(Ry - Qz)$$
$$G = \text{S} . dM(Pz - Rx)$$
$$H = \text{S} . dM(Qx - Py)$$

Ciò posto, le tre equazioni (94) ponendovi $dM$ invece di $m$, e moltiplicandole per $dt$, daranno

$$F dt = \text{S} . y dM \frac{ddz}{dt} - \text{S} . z dM \frac{ddy}{dt}$$
$$G dt = \text{S} . z dM \frac{ddx}{dt} - \text{S} . x dM \frac{ddz}{dt}$$
$$H dt = \text{S} . x dM \frac{ddy}{dt} - \text{S} . y dM \frac{ddx}{dt},$$

Ora siano $p$, $q$, $r$ le velocità angolari colle quali girerà il sistema attorno i tre assi $OX$, $OY$, $OZ$. Nell'equazioni precedenti, in luogo de' differenziali delle coordinate $x$, $y$, $z$ si mettano i loro valori in $p$, $q$, $r$ tolti dalle equazioni ($C$). E si avverta che per aver prese le coordinate sugli assi principali, sarà (147)

$\text{S} . xy dM = 0$, $\text{S} . xz dM = 0$, $\text{S} . yz dM = 0$, onde spariranno tutti i termini che sotto il segno S contengano $xydM$ o $xzdM$ o $yzdM$ moltiplicato per qualsivoglia funzione di $p$, $q$, $r$; giacchè $p$, $q$, $r$ non sono funzioni se

non che della variabile $t$, e però escon fuori del segno sommatorio S. Di più si chiamino $A$, $B$, $C$ i momenti d' inerzia del sistema rapporto ai tre assi principali $OX$, $OY$, $OZ$, onde sia

$$S.dM(y^2+z^2)=A; \quad S.dM(x^2+z^2)=B;$$
$$S.dM(x^2+y^2)=C.$$

Con queste avvertenze compiuta la prescritta sostituzione, darà in ultimo le tre equazioni semplicissime

$$(F)\quad \begin{cases} Fdt=Adp+(C-B)\,qrdt \\ Gdt=Bdq+(A-C)\,prdt \\ Hdt=Cdr+(B-A)\,pqdt \end{cases}$$

onde conoscere le tre velocità $p$, $q$, $r$, e per esse (168) la posizion del sistema ad ogni istante.

171. *Coroll. I.* Note le velocità $p$, $q$, $r$ sapremo ancora per ciascuno istante (162. 163) attorno qual asse e con qual velocità angolare si ravvolga il sistema.

172. *Coroll. II.* Suppongasi che il sistema fosse da prima in quiete, cosicchè quando $t=0$ fosse $p=q=r=0$. Sarà pel principio del moto

$$Fdt=Adp; \; Gdt=Bdq; \; Hdt=Cdr$$

onde le velocità angolari infinitesime $dp$, $dq$, $dr$ colle quali il sistema incomincierà a rivolgersi attorno i tre assi, saranno $\frac{Fdt}{A}$,

$\frac{G\,dt}{B}$, $\frac{H\,dt}{C}$. Se dunque per compendio si ponga $\sqrt{\left(\frac{F^2}{A^2}+\frac{G^2}{B^2}+\frac{H^2}{C^2}\right)}=W$, l'asse istantaneo della rotazione iniziale farà coi tre assi gli angoli de' coseni $\frac{F}{A\,W}$, $\frac{G}{B\,W}$, $\frac{H}{C\,W}$; e sarà la velocità angolare incipiente $dV=W\,dt$.

173. *Proposizione II.* Determinare la rotazione del sistema non sollecitato da veruna forza acceleratrice.

Quì sarà $F=G=H=0$; e se per abbreviare faremo

$$\frac{B-C}{A}=L,\ \frac{C-A}{B}=M,\ \frac{A-B}{C}=N$$

le tre equazioni ($F$) diventeranno

$$dp=Lqrdt;\ dq=Mprdt;\ dr=Npqdt$$

Pongasi $pqrdt=d\Phi$, ed avremo

$$pdp=Ld\Phi;\ qdq=Md\Phi;\ rdr=Nd\Phi$$

ed integrando

$$p^2=2L\Phi+a^2;\ q^2=2M\Phi+b^2;\ r^2=2N\Phi+c^2$$

essendo $a,b,c$ i valori iniziali di $p,q,r$ e quindi

$$dt=\frac{d\Phi}{\sqrt{(2L\Phi+a^2)(2M\Phi+b^2)(2N\Phi+c^2)}}$$

Integrando quest'equazione in guisa che $t=0$ dia $\Phi=0$, conosceremo ad ogni istante il

valore di $\Phi$, onde quelli delle tre velocità $p$, $q$, $r$.

Rimane a determinarsi la posizione degli assi principali, ricavando dalle equazioni ($D$) gli angoli $l$, $m$, $n$, e dall'equazioni ($E$) gli angoli $\lambda$, $\mu$, $\nu$. Se per compendio si scriva

$$\sqrt{(A^2 a^2 + B^2 b^2 + C^2 c^2)} = K$$

si soddisfarà all'equazioni ($D$) ponendo

$$\cos. l = \frac{A p}{K} \; ; \; \cos. m = \frac{B q}{K} \; ; \; \cos. n = \frac{C r}{K}$$

ed infatti questi valori sostituiti nelle equazioni ($D$) le rendono identiche colle equazioni ($F$).

Finalmente delle equazioni ($E$) basterà (167) risolverne la prima, per ricavarne l'angolo $\lambda$. Or questa prima equazione colla sostituzione de' valori precedenti di $l$, $m$, $n$ diventa

$$d\lambda (A^2 p^2 - K^2) = K\,dt\,(Bq^2 + Cr^2)$$

Dove se in luogo di $p$, $q$, $r$ porremo i loro valori già determinati per $t$, avremo un equazion differenziale separata fra $\lambda$ e $t$, l'integrazion della quale darà per ciascun istante l'angolo $\lambda$, e quindi gli altri due.

174. *Scolio I.* I valori degli angoli $l$, $m$, $n$ potranno sembrare incompleti, perchè vi mancano le costanti arbitrarie che dovrebbero poi determinarsi in guisa che posto $t = 0$ dessero i valori iniziali di quegli angoli. Ma ciò non è necessario nel caso no-

stro, giacchè questi valori iniziali sono arbitrarj eglino stessi, potendosi fissare ad arbitrio il punto $T$ nella sfera (166) donde si spiccano gli archi $l$, $m$, $n$. E la proposta risoluzione sarà completa, fissando il suddetto punto in guisa che sia nel principio del moto

$$\cos. l = \frac{Aa}{K}\ ;\ \cos. m = \frac{Bb}{K}\ ;\ \cos. n = \frac{Cc}{K}$$

175. *Coroll. I.* Queste formole ci confermano quello che altronde sappiamo per l' art. 102: che la forza viva del sistema, o sia la somma de' prodotti di ciascun elemento pel quadrato della sua velocità, si mantiene costante.

Infatti moltiplicando i valori di $p^2$, $q^2$, $r^2$ per $A$, $B$, $C$ rispettivamente, indi sommandoli, avremo

$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 = \text{cost.}$
Ma $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 =$ (162) $V^2$ ($A\cos. f^2$ $+ B\cos. g^2 + C\cos. h^2$) $=$ (148) $V^2 . \Sigma$. Or sia $u$ la velocità dell' elemento $dM$ e $k$ la sua distanza dall' asse istantaneo; sarà $\Sigma = S . k^2 dM$, e $kV = u$. Dunque $V^2 \Sigma =$ $V^2 S . k^2 dM = S . u^2 dM = \text{cost.}$

176. *Coroll. II.* Se il sistema incomincia a girare attorno un asse principale, seguirà rotando perpetuamente ed equabilmente attorno il medesimo.

Supponghiamo infatti che il sistema cominci a rotare attorno $O X$, colla velocità $a$; sarà $b = 0$; $c = 0$. Quindi l'equazione fra $t$ e $\Phi$ integrata in guisa che $t = 0$ dia $\Phi = 0$, darà $\Phi = 0$; onde sarà $p = a$, $q = 0$, $r = 0$

177. *Coroll. III.* Supponghiamo ora che l'asse attorno cui comincia il giro, non sia già l'asse principale $O X$, ma pochissimo se ne discosti. Da ciò intenderemo ancora quello che accaderà, nel caso che girando il corpo attorno un asse principale, sia la sua conversione disturbata da una minima scossa.

Siano dunque le velocità iniziali $b$, $c$ non più eguali a zero, ma bensì picciolissime rispetto della $a$. L'equazione tra $t$ e $\Phi$ darà $\Phi$ quantità picciolissima, onde sarà prossimamente $p = a$. Ponendo poi $p = a$ nelle ultime due equazioni ($F$) e poi differenziandole, la loro combinazione darà

$$\frac{d\,d\,q}{d\,t^2} - a^2 M N q = 0 \;;\; \frac{d\,d\,r}{d\,t^2} - a^2 M N r = 0$$

equazioni lineari, che integrate in guisa che $t = 0$, dia $q = b$ ed $r = c$, faranno conoscere i valori di $q$ e di $r$ espressi per $t$.

Prima d'integrarle distingueremo due casi, secondo che $M$ ed $N$ saranno di segni contrarj, o dello stesso segno. Quest'ultimo caso avverrà, quando siano i tre momenti

principali $A$, $B$, $C$ diseguali fra loro, ed il momento $A$ dell' asse $OX$ non sia (139) nè il massimo, nè il minimo, ma intermedio fra quelli degli altri due. In tutti gli altri casi $M$ ed $N$ avranno segni contrarj.

178. *Coroll. IV.* Siano $M$ ed $N$ di segno contrario, e facciasi $N = -Mk^2$. Le equazioni

$$\frac{ddq}{dt^2} + a^2 M^2 k^2 q = 0 \; ; \; \frac{ddr}{dt^2} + a^2 M^2 k^2 r = 0$$

integrate daranno

$$kq = c \sin. aMkt + bk \cos. aMkt$$
$$r = c \cos. aMkt - bk \sin. aMkt$$

Questi valori di $q$ ed $r$ rimangono sempre piccolissimi, per quanto cresca $t$, e vanno continuamente librandosi fra i limiti $q = b$; $kq = c$; $r = c$, $r = bk$. Pertanto allorchè il sistema viene a rivolgersi attorno un asse vicinissimo a quell' asse principale cui compete il momento d' inerzia massimo, o il minimo, l' asse di rotazione va perpetuamente oscillando attorno l' asse principale, rimanendovi sempre vicinissimo.

179. *Coroll. V.* Siano $M$ ed $N$ di segno eguale, ed $N = Mk^2$. Le equazioni

$$\frac{ddq}{dt^2} - a^2 M^2 k^2 q = 0 \; ; \; \frac{ddr}{dt^2} - a^2 M^2 k^2 r = 0$$

integrate daranno

$$2kq = (bk + c)\, e^{aMkt} + (bk - c)\, e^{-aMkt}$$
$$2r = (bk + c)\, e^{aMkt} - (bk - c)\, e^{-aMkt}$$

Questi valori al crescere di $t$ crescono oltre ogni limite. Pertanto quando il sistema viene a rivolgersi attorno quell' asse principale cui non compete nè il momento massimo, nè il minimo, l' uniformità della sua conversione è istabile, ed una menoma scossa può fare che l' asse di rotazione si dilunghi indefinitamente dall' asse principale.

180. *Scolio II.* Di questa singolar proprietà degli assi principali, che la rotazione attorno i medesimi si mantiene perpetua ed uniforme, possiamo assicurarci anche in quel modo che fu altrove (I. 285) indicato. E questo è col far vedere che le forze centrifughe per le quali ciascun elemento $dM$ tende a scostarsi dall' asse si bilanciano fra loro in modo che l' asse ne viene tirato egualmente per ogni parte, nè più da una banda propende che dall' altra. Quest' equilibrio delle forze centrifughe si dimostra come segue.

Giri il sistema attorno l' asse delle $x$ con velocità angolare $p$. La velocità dell' elemento $dM$ sarà $= p\sqrt{(y^2 + z^2)}$, e la sua forza centrifuga (I. 227) $= p^2 dM\sqrt{(y^2 + z^2)}$. Risolvendo questa forza in due secondo le direzioni delle coordinate $y$ e $z$, saranno queste $p^2 y\, dM$, $p^2 z\, dM$.

Ciò posto, fingasi l' asse fermato in due pernj posti alle distanze $\zeta$, $\zeta'$ dall' origine delle ascisse, e si cerchino (I. 106) le pres-

sioni sostenute da questi pernj. Troveremo che il primo sostiene nel senso delle coordinate $y$, $z$ le pressioni

$$\frac{p^2}{\zeta-\zeta'}(\text{S}.xydM-\zeta'\text{S}.ydM);$$

$$\frac{p^2}{\zeta-\zeta'}(\text{S}.xzdM-\zeta'\text{S}.zdM)$$

ed il secondo sostiene similmente le pressioni

$$\frac{p^2}{\zeta-\zeta'}(\zeta\text{S}.ydM-\text{S}.xydM);$$

$$\frac{p^2}{\zeta-\zeta'}(\zeta\text{S}.zdM-\text{S}.xzdM).$$

Ma poichè l' asse di rotazione è un asse principale, sarà (147) $\text{S}.xydM=\text{S}.xzdM=0$; e poichè passa pel centro di gravità, sarà ancora $\text{S}.ydM=\text{S}.zdM=0$. Quindi dovunque sian posti i due pernj, le pressioni contro de' medesimi tornano nulle. Dal che si vede che l' asse principale non sostiene dall' azione delle forze centrifughe veruno sforzo tendente a piegarlo.

181. *Proposizione III.* Determinare il moto d' un sistema rigido attorno un fulcro immobile.

Qui il moto progressivo non ha luogo; e il moto rotatorio attorno al fulcro si determina come nelle due Proposizioni precedenti, avvertendo di prendere l' origine nel ful-

cro, e le coordinate ne' tre assi principali pel fulcro condotti: il che non apporta verun cangiamento alle formole determinatrici del moto.

E si troverà come prima (176) che se non vi sono forze acceleratrici, la rotazione impressa attorno un asse principale si conserva equabile e perpetua.

182. *Scolio*. Apparisce questo medesimo dalla ragione prodotta all' art. 180., sebbene in questo caso l'asse principale non passi pel centro di gravità, e però non possa più farsi $S.ydM=0$, $S.zdM=0$. Poichè se noi collocheremo l'uno o l'altro dei due pernj nel fulcro immobile, facendo $\zeta=0$, oppure $\zeta'=0$, troveremo che quel pernio che non coincide col fulcro non sostiene pressione alcuna. E questo basta per assicurarci che l'asse di rotazione si reggerà immobile senza piegare da veruna parte.

183. *Proposizione IV*. Determinare il moto d'un sistema rigido attorno un asse immobile.

Sia questo l'asse delle $x$, sia $p$ la velocità angolare della rotazione, e sia $F$ la somma de' momenti delle forze acceleratrici per aggirare il sistema attorno questo asse. Avremo (160) $dx=0$, $dy=-pzdt$, $dz=pydt$. Si sostituiscano questi valori nell'equazione (170)

$$Fdt=S.ydM\frac{ddz}{dt}-S.zdM\frac{ddy}{dt}$$

e si chiami $A'$ il momento d' inerzia del sistema rispetto dell' asse di rotazione, onde sia $S . dM ( y^2 + z^2 ) = A'$. Risulterà $F dt = A' dp$. Da questa equazione conosceremo la velocità angolare $p$, e quindi il moto del sistema.

184. *Coroll. I.* Se non vi sono forze acceleratrici, sarà la conversion del sistema equabile e perpetua.

185. *Coroll. II.* Sia il sistema animato dalla sola gravità, e sospeso da un asse orizzontale. Sia $M$ la massa, $k$ la perpendicolare condotta dal centro di gravità del sistema sull' asse di rotazione, e $\phi$ l' angolo che fa questa retta $k$ colla verticale. Avremo $F = Mgk \sin. \phi$; onde $\frac{dp}{dt} = \frac{Mgk \sin. \phi}{A'}$; siccome appunto si conchiuse (I. 298) negli Elementi.

## CAP. V.

### *Del Moto ne' sistemi di forma variabile,*

186. L' infinita diversità de' movimenti che ponno cadere in un sistema non rigido, non permette di rappresentarli con un limitato numero d' equazioni generali, siccome si è fatto pe' sistemi rigidi. Conviene pertanto

ricorrere immediatamente all'equazione (*B*), la quale applicata come s'insegnò all'art. 86 non mancherà di somministrarci tante equazioni quante abbisognano a determinare il moto di ciascun corpo. Noi ne mostreremo in questo Capo parecchi esempj; a' quali si potranno aggiungere quelli che daremo nella Sezione Quinta circa il moto de' corpi che scambievolmente s' attraggono.

187. *Proposizione I.* Penda dall' alto un filo flessibile carico di varj pesi, e sia rimosso dal perpendicolo d' una quantità minima, rimanendo tuttavia tutto il filo in un piano verticale. Si voglion determinare le oscillazioni di questo pendolo.

Prendo le ascisse $x$ sulla verticale calata dal punto di sospensione, e le ordinate $y$ orizzontali. Siano $m$, $m'$, $m''$ ec. le masse de' pesi attaccati al filo, e sia $r$ la lunghezza del filo tra il punto di sospensione e il peso $m$, $r'$ il tratto del filo tra il peso $m$ ed il peso $m'$ ec. Siano poi le coordinate del primo peso $x$, $y$; quelle del secondo $x'$, $y'$ ec. Facendo $P=P'$ ec. $=g$, e $Q=Q'$ ec. $=o$, l'equazione (*B*) diventa

$$o=\left(g-\frac{ddx}{dt^2}\right)m\delta x+\left(g-\frac{ddx'}{dt^2}\right)m'\delta x'\ldots$$

$$-\frac{ddy}{dt^2}\, m\delta y \qquad -\frac{ddy'}{dt^2}\, m'\delta y'\ldots$$

Or dovremo valerci delle condizioni particolari del nostro sistema onde ridurre al minor numero possibile le variazioni $\delta x$, $\delta y$, $\delta x'$ ec. Queste condizioni sono 1.° che le lunghezze de' tratti $r$, $r'$, $r''$ ec. sono costanti, supponendosi il filo incapace d'allungarsi. 2.° che le ordinate $y$, $y'$, $y''$ ec. sono picciolissime in confronto di $r$, $r'$ ec. essendo palese che le divagazioni del pendolo dalla verticale rimarranno sempre picciolissime. Quindi essendo

$$r^2 = x^2 + y^2\,;\; r'^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 \text{ ec.}$$

avremo mercè la picciolezza delle $y$, $y'$ ec.

$$x = r - \frac{y^2}{2r};\; x' - x = r' - \frac{(y'-y)^2}{2r'};\; x'' - x' = r'' - \frac{(y''-y')^2}{2r''} \text{ ec.}$$

onde per essere $r$, $r'$, $r''$ ec. costanti, sarà

$$\delta x = -\frac{y}{r}\,\delta y$$

$$\delta x' = -\frac{y}{r}\,\delta y - \frac{(y'-y)}{r'}\,\delta y' + \frac{(y'-y)}{r'}\,\delta y$$

$$\delta x'' = -\frac{y}{r}\,\delta y - \frac{(y'-y)}{r'}\,\delta y' - \frac{(y''-y')}{r''}\,\delta y'' + \frac{(y'-y)}{r'}\,\delta y + \frac{(y''-y')}{r''}\,\delta y'$$

. . . . . . . . . . .

E finalmente per la picciolezza delle $y$, $y'$ ec.

in confronto delle $x$, sarà ancora

$$ddx = ddx' = ddx'' \ldots\ldots = 0.$$

Fatte queste sostituzioni, mercè le quali verranno ad eliminarsi dall'equazione ($B$) le variazioni $\delta x$, $\delta x'$, $\delta x''$ ec. ed eguagliati a zero i coefficienti delle $\delta y$, $\delta y'$, $\delta y''$ ec. avremo le seguenti equazioni, altrettante quanti sono i corpi

$$0=\frac{ddy}{dt^2}+(m+m'\ldots+m^{(n)})\frac{gy}{mr}-(m'+m''\ldots+m^{(n)})\frac{g(y'-y)}{mr'}$$

$$0=\frac{ddy'}{dt^2}+(m'+m''\ldots+m^{(n)})\frac{g(y'-y)}{m'r'}-(m''\ldots+m^{(n)})\frac{g(y''-y')}{m'r''}$$

$$0=\frac{ddy''}{dt^2}+(m''\ldots+m^{(n)})\frac{g(y''-y')}{m''r''}-(m'''\ldots+m^{(n)})\frac{g(y'''-y'')}{m''r'''}$$

. . . . . . . . . . . . .

$$0=\frac{ddy^{(n)}}{dt^2}+m^{(n)}\frac{g(y^{(n)}-y^{(n-1)})}{m^{(n)}r^{(n)}}$$

le quali essendo lineari coi coefficienti costanti, ponno integrarsi compiutamente coi noti metodi.

188. *Coroll. I.* Indicherò prima generalmente il modo d'integrarle, poi ne mostrerò qualche esempio. Si ponga $y' = ay$, $y'' = by$, $y''' = cy$ ec. essendo $a$, $b$, $c$ ec. quantità costanti da determinarsi. Così le nostre equazioni prenderanno questa forma

$$\frac{ddy}{dt^2}+Fy=0;\ \frac{ddy}{dt^2}+Gy=0;\ \frac{ddy}{dt^2}+Hy=0 \text{ ec.}$$

ove $F$, $G$, $H$ ec. saranno funzioni note e lineari delle indeterminate $a$, $b$, $c$ ec. Or dovranno queste funzioni $F$, $G$, $H$ ec. essere uguali tra loro: onde ponendo

$$k^2 = F\,;\; k^2 = G\,;\; k^2 = H \text{ ec.}$$

avrò $n$ equazioni, dalle quali eliminando le indeterminate $a$, $b$, $c$ ec. che sono in numero $n - 1$, rimarrà per determinar $k^2$ un equazione di grado $n$. Avrà dunque $k^2$ valori numero $n$, ai quali corrisponderanno altrettanti valori di ciascheduna delle indeterminate $a$, $b$, $c$ ec.

Or l'equazione $\frac{d\,d\,y}{d\,t^2} + k^2\,y = 0$ integrata dà $y = A \sin.\, k\,t + B \cos.\, k\,t$. Quindi se i diversi valori di $k^2$ si distinguano così $k^2$, $k'^2$, $k''^2$ ec. e similmente si contrassegnino i corrispondenti valori delle $a$, $b$, $c$ ec. saranno gl'integrali completi delle nostre equazioni

$$y = A \sin kt + B \cos.kt + A' \sin.k't + B' \cos.k't$$
$$y' = aA \sin kt + aB \cos kt + a'A' \sin.k't + a'B' \cos.k't$$
$$y'' = bA \sin.kt + bB \cos.kt + b'A' \sin.k't + b'B' \cos.k't$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

189. *Coroll II.* Le costanti arbitrarie $A$, $A'$, $B$, $B'$ ec. in numero $2\,n$ vanno determinate dai valori iniziali di $y$, $y'$, $y''$ ec. e di $\frac{d\,y}{d\,t}$, $\frac{d\,y'}{d\,t}$, $\frac{d\,y''}{d\,t}$ ec. vale a dire dalla po-

sizione iniziale del sistema, e dagl' impulsi iniziali che per avventura gli fossero impressi.

E così se i corpi $m$, $m'$ ec. senza verun impulso furono semplicemente lasciati in libertà, verrà $A = A'$ ec. $= 0$. Per lo contrario se il pendolo da principio era a piombo, e ne fu rimosso per impulsi minimi, verrà $B = B'$ ec. $= 0$.

190. *Coroll. III.* Se i pesi sono eguali ed equidistanti, l'equazioni vengon più semplici

$$0 = \frac{ddy}{dt^2} + \frac{g}{r}\left(ny - (n-1)(y'-y)\right)$$

$$0 = \frac{ddy'}{dt^2} + \frac{g}{r}\left((n-1)(y'-y) - (n-2)(y''-y')\right)$$

$$0 = \frac{ddy''}{dt^2} + \frac{g}{r}\left((n-2)(y''-y') - (n-3)(y'''-y'')\right)$$

. . . . . . . . . . . . .

$$0 = \frac{ddy^{(n)}}{dt^2} + \frac{g}{r}\left(y^{(n)} - y^{(n-1)}\right)$$

e facendo (188) $y' = ay$, $y'' = by$ ec. e per brevità scrivendo $\frac{rk^2}{g} = z$, avremo le equazioni

$$z = n - (n-1)(a-1)$$
$$a\,z = (n-1)(a-1) - (n-2)(b-a)$$
$$b\,z = (n-1)(b-a) - (n-3)(c-b)$$

. . . . . . . . . . . . . .

dalle quali eliminate $a$, $b$, $c$.... rimarrà l' equazione in $z$ del grado $n$esimo

$$0 = z^n - n^2 z^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2} z^{n-2} - \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{2.3} z^{n-3} \ldots$$

191. *Coroll. IV.* Siano attaccati al pendolo due soli pesi eguali ed equidistanti. Faremo $n = 2$, e l' equazione $z^2 - 4z + 2 = 0$ darà $z = 2 \pm \sqrt{2}$. Quindi

$$k = \sqrt{\left(\frac{g}{r}(2+\sqrt{2})\right)};\ k' = \sqrt{\left(\frac{g}{r}(2-\sqrt{2})\right)}$$

$$a = 1 - \sqrt{2}; \qquad a' = 1 + \sqrt{2}$$

onde (188) i valori di $y$ ed $y'$.

192. *Coroll. V.* Siavi un peso solo. Fatto $n = 1$, avremo $z = 1$, e $k = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{r}}$. Quindi

$$y = A \sin. \frac{t\sqrt{g}}{\sqrt{r}} + B \cos. \frac{t\sqrt{g}}{\sqrt{r}}$$

Agevolmente si ravviserà come quest' equazione rappresenta le vibrazioni isocrone del pendolo semplice.

193. *Coroll. VI.* Qualunque poi sia il numero de' pesi, la forma stessa de' valori (180) di $y$, $y'$, $y''$ ec. fa conoscere che il moto di ciaschedun peso è composto di tanti moti parziali, ognuno analogo alle oscillazioni d' un pendolo semplice.

194. *Scolio I.* Il Problema non sarebbe punto più difficile, se il pendolo deviasse

dal perpendicolo in qualunque modo, e senza la condizione di rimaner tutto in un piano verticale. Introducendo allora la terza coordinata orizzontale $z$, che anch' essa dovrebbe esser picciolissima al pari della $y$, si avrebbe per le ordinate $z$, $z'$, $z''$ ec. un sistema d'equazioni tutte simili alle già trovate (187) per le $y$, $y'$, $y''$ ec. e i valori delle $z$ sarebbero compagni di quelli (188) delle $y$, col solo divario delle costanti arbitrarie. Questa osservazione si applicherà anche a due Problemi seguenti.

195. *Scolio II.* Si accennarono nell'art. 86 due modi di accomodare l'equazione ($B$) alle condizioni particolari del sistema, corrispondenti ai due metodi che per l'equazione ($A$) si proposero (27. 28). Nello sciogliere il nostro Problema ci siamo attenuti al primo metodo. Egualmente avremmo potuto valerci del secondo, denominando $p$, $p'$, $p''$ ec. le tensioni de' fili $r$, $r'$, $r''$ ec. ed aggiungendo all'equazione ($B$) i termini $-p\delta r - p'\delta r' - p''\delta r''$ ec. dove $r\delta r = x\delta x + y\delta y$

$r'\delta r' = (x'-x)(\delta x' - \delta x) + (y'-y)(\delta y' - \delta y)$ ec.

Sono allora tutte le variazioni $\delta x$, $\delta y$, $\delta x'$ ec. arbitrarie, e fra loro indipendenti. Eguagliando a zero li coefficienti di $\delta x$, $\delta x'$, $\delta x''$ ec. si avranno $n$ equazioni; ed altrettante dai coefficienti di $\delta y$, $\delta y'$, $\delta y''$ ec. Le prime determineranno facilmente i valori

delle tensioni $p$, $p'$ ec. Poichè avvertendo che per la picciolezza delle $y$ si ha $ddx = ddx'$ ec. $= 0$, ed $\frac{x}{r} = \frac{x'-x}{r'} = \frac{x''-x'}{r''}$ ec. $= 1$, si avrà $p = g\,(m + m' \ldots\ldots + m^{(n)})$; $p' = g\,(m' + m'' \ldots + m^{(n)}) \ldots\ldots p^{(n)} = g\,m^{(n)}$. Sostituiti poi questi valori nelle seconde equazioni, torneranno quelle (187) di prima.

196. *Proposizione II.* Sia lo stesso pendolo della Proposizion precedente carico de' pesi $m$, $m'$, $m''$ ec. ed all'estremità inferiore sia attaccato un peso $R$ gravissimo in confronto di tutti gli altri $m$, $m'$ ec. Rimosso il pendolo dal perpendicolo, così però che il peso $R$ resti immoto, si vuol determinare il moto oscillatorio.

Per ridurre questo Problema al precedente, null'altro occorre se non che fare nelle equazioni (187) il peso $m^{(n)} = R$ grandissimo in paragone degli altri, e porre $y^{(n)}$, e $ddy^{(n)} = 0$. Così le equazioni divengono

$$0 = \frac{ddy}{dt^2} + \frac{gR}{mr}y - \frac{gR}{mr'}(y'-y)$$

$$0 = \frac{ddy'}{dt^2} + \frac{gR}{m'r'}(y'-y) - \frac{gR}{m'r''}(y''-y')$$

$$0 = \frac{ddy''}{dt^2} + \frac{gR}{m''r''}(y''-y') - \frac{gR}{m''r'''}(y'''-y'')$$

. . . . . . . . . . . .

e non contando il peso tendente $R$ nel numero $n$ de' pesi attaccati al filo, sarà l'ultima, o sia la $n$esima equazione

$$0 = \frac{ddy^{(n)}}{dt^2} + \frac{gR}{m^{(n)}r^{(n)}}(y^{(n)} - y^{(n-1)}) + \frac{gR}{m^{(n)}r^{(n+1)}}y^{(n)}$$

197. *Coroll. I.* Se i pesi sono eguali ed equidistanti, l'equazioni divengon più semplici. Per integrarle ponghiamo $y' = ay$, $y'' = by$ ec. e seguitando la traccia segnata all' art. 188. formiamo le equazioni che dovranno determinare gli $n$ valori di $k^2$ e di ciascuna delle costanti $a$, $b$, $c$ ec. Scrivendo per compendio $\frac{mrk^2}{gR} = z$, troveremo le seguenti equazioni

$z - 2 + a = 0$

$a(z - 2) + 1 + b = 0$

$b(z - 2) + a + c = 0$

. . . . . . . . . .

$\mu(z - 2) + \lambda = 0$

dalle quali eliminando $a$, $b$, $c$ ec. si avrà un equazione in $z$ del grado $n$.

198. *Coroll. II.* Ma poichè i termini $0$, $1$, $a$, $b$, $c$ ec. formano una serie ricorrente, si può soddisfare a queste equazioni generalmente. Essendo $q$ un numero qualunque, ed $i$ un angolo qualunque, si ha

$$-2\sin. qi \cos. i + \sin. (q-1)i + \sin. (q+1)i = 0$$

Dal che si vede che ponendo $z-2=-2\cos. i$, e poi

$$a=\frac{\sin. 2i}{\sin. i},\ b=\frac{\sin. 3i}{\sin. i}\dots\mu=\frac{\sin. ni}{\sin. i}$$

a tutte l'equazioni dell' articolo precedente sarà soddisfatto, tranne l'ultima, la quale ci servirà per determinare l'angolo $i$.

Quest' ultima darà

$$-2\sin. ni\cos. i+\sin. (n-1)i=0$$

o sia $\sin. (n+1)i=0$; onde si trae $i=\frac{\pi s}{n+1}$ essendo $s$ un numero qualunque intero e positivo. Quindi ponendo successivamente $s=1$, 2, 3.... $n$ si avranno $n$ valori diversi per $i$, e quindi per $z$ e per $k^2$, e per cadauna delle costanti $a$, $b$, $c$ ec. Chi facesse $s$ maggiore di $n$, tornerebbero pure gli stessi valori di $z$.

199. *Coroll. III.* Siano due pesetti eguali solamente, e disposti ad eguali intervalli tra il punto di sospensione e il punto infimo; onde sarà $i=\frac{\pi}{3}$, $i'=\frac{2\pi}{3}$; $z=1$, $z'=3$;

$k^2=\frac{gR}{mr}$, $k''=\frac{3gR}{mr}$; $a=1$, $a'=-1$.

Quindi se non v' è impulso iniziale, sarà

$$y=B\cos. t\sqrt{\frac{gR}{mr}}+B'\cos. t\sqrt{\frac{3gR}{mr}}$$

$$y'=B\cos. t\sqrt{\frac{gR}{mr}}-B'\cos. t\sqrt{\frac{3gR}{mr}}$$

200. *Scolio*. Del resto ancor questo Problema potrebbe sciogliersi col secondo metodo, come all' art. 195. E stante la picciolezza de' pesi $m$, $m'$ ec. in confronto del peso $R$, la tensione di tutto il filo verrebbe prossimamente costante, ed $= R$.

E qui giova avvertire che questa seconda soluzione non suppone già come la prima gl' intervalli $r$, $r'$, $r''$ ec. assolutamente invariabili, ma solamente le $y$ picciolissime, e però le $r$, $r'$, $r''$ ec. pochissimo diverse dalle ascisse $x$, $x'-x$ ec. E però si adatta egualmente alle vibrazioni d'un filo elastico e distraibile, fisso in ambedue gli estremi, teso con forza $R$, e carico d' un dato numero di pesi, menomamente rimossi dalla verticale.

Moltiplicando all' infinito il numero de' pesetti distribuiti pel filo, e sminuendo all' infinito i loro intervalli, si ha il caso d' una corda elastica tesa, e distratta in qualunque modo dalla situazion rettilinea. Comprenderemo questo caso nel seguente generale Problema.

201. *Proposizione III.* Determinare il moto d' una corda flessibile fissa in uno de' suoi termini, sollecitata in ogni suo punto da forze date, e rimossa comunque dalla positura rettilinea in cui sarebbe in equilibrio.

Prendo l' origine delle ascisse nel termine

fisso, le $x$ sulla direzione rettilinea della corda equilibrata, e faccio le ordinate $y$ perpendicolari alle $x$. Essendo $ds$ un elemento qualunque della corda incurvata, siano $P$, $Q$ le forze che lo sollecitano secondo le coordinate $x$, $y$, sia $h$ la grossezza o sezion trasversale della corda in quell' elemento, e $q$ la sua densità, onde $hqds$ la sua massa, e sia finalmente $p$ la sua tensione. Sarà per questo sistema l' equazione ($B$)

$$o = S.\left(P - \frac{ddx}{dt^2}\right) hds\delta x + S.\left(Q - \frac{ddy}{dt^2}\right) hds\delta y$$
$$- S.p\delta ds.$$

L' ultimo termine colle riduzioni altrove insegnate (57) e praticate (60) si converte in questi due

$$S.\delta x d.\frac{pdx}{ds} + S.\delta y d.\frac{pdy}{ds}$$

Facendone la sostituzione, e poscia eguagliando a zero (58) i coefficienti di $\delta x$, $\delta y$ sotto il segno S avremo per la determinazione del moto della corda queste due equazioni

$$\frac{ddx}{dt^2} = P + \frac{1}{hqds} d.\frac{pdx}{ds};\ \frac{ddy}{dt^2} = Q + \frac{1}{hqds} d.\frac{pdy}{ds}$$

202. *Scolio*. Prima di applicare le equazioni trovate ad alcun caso particolare, gioverà avvertire, che le differenze $ddx$, $ddy$ ne' primi membri sono relative soltanto alla

variabilità del tempo, nè altro esprimono se non che la variazione delle coordinate $x$, $y$ d'uno stesso punto in diversi tempi; siccome dalla loro genesi (84) è manifesto. Per lo contrario ne' secondi membri la differenza $ds$, e le $dx$, $dy$ da quella derivate (60) suppongono il tempo costante, ed esprimono soltanto la variazione degli elementi $x$, $y$, $s$ pe' diversi punti della curva, e nello stesso tempo. Per il che converrà distinguerle cogli usati simboli delle differenze parziali.

203. *Coroll. I.* Se ponghiamo che la corda pochissimo s' allontani dalla positura rettilinea, potremo fare $\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=0$, e $ds=dx$. Quindi la prima equazione darà $p=T-$ S. $Phqds$, essendo $T$ una costante. E la seconda, sostituito questo valore, e differenziando nel secondo membro col prender costante l'elemento $ds$, diventerà

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)-\left(\frac{T}{hq}-\frac{1}{hq}\text{S}.Phqds\right)\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)+P\left(\frac{dy}{dx}\right)+Q=0$$

204. *Coroll. II.* Sia una catena di peso e di grossezza uniforme, pendente dall' alto liberamente, e di pochissimo smossa dalla verticale. Faremo $P=g$, $Q=0$; e sarà $p=T-ghqs$. Dicasi $l$ la lunghezza di tutta la catena; è manifesto che quando

$s = l$ dovrà essere $p = 0$; onde $T = ghql$, e $p = ghq(l - s)$. Quindi

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) - g(l-s)\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) + g\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

Quest' equazione rappresenta la legge delle oscillazioni della catena; ma i noti metodi non giungono ad integrarla.

205. *Coroll. III.* Sia una corda elastica di grossezza e densità uniforme, fissa in ambi gli estremi, e tesa da un peso $= T$. Sia priva di gravità, o veramente si trascuri il suo peso siccome minimo a fronte del peso tendente. Qui fatto $P = Q = 0$ avremo $p = T$, e l' equazione

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) - \frac{T}{hq}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = 0$$

della quale si conosce l' integrale completo

$$y = F.\left(x + t\sqrt{\frac{T}{hq}}\right) + f.\left(x - t\sqrt{\frac{T}{hq}}\right)$$

dove i simboli $F$, $f$ denotano funzioni arbitrarie.

206. *Coroll. IV.* Queste funzioni si determinano quando si conosca la figura iniziale della corda, e la velocità iniziale impressa a ciascun punto della medesima. Posto che queste cose ci siano note, conosceremo per ogni ascissa $x$ il valore di $y$ e di $-\left(\frac{dy}{dt}\right)$.

quando $t = 0$. Ora se per brevità facciamo $\sqrt{\frac{T}{hq}} = b$, abbiamo generalmente

$$y = F(x + bt) + f(x - bt)$$

$$-\left(\frac{dy}{dt}\right) = -bF'(x + bt) + bf'(x - bt)$$

denotando coi simboli $F'$, $f'$ i differenziali di $F$, $f$; onde sia $F'(x+bt) = (dx+bdt)F(x+bt)$. Dunque se per un ascissa qualunque $x$ sia l'ordinata iniziale $s$, e la velocità iniziale $u$, avremo

$$s = F.x + f.x\,;\; u = -bF'.x + bf'.x$$

e moltiplicando l'ultima equazione per $dx$, poscia integrandola, avremo $-\int u\,dx = bF.x - bf.x$. Sarà dunque

$$F.x = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2b}\int u\,dx$$

$$f.x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2b}\int u\,dx$$

dove i secondi membri saranno funzioni note di $x$.

Ora nella prima equazione in luogo di $x$ si ponga $x + bt$, e nella seconda in luogo di $x$, si ponga $x - bt$. Avremo così espressi in $x$ e $t$ i valori delle due funzioni $F(x+bt)$, $f(x - bt)$ la somma delle quali ne dà il valore di $y$.

207. *Coroll. V.* Ma qui convien badare che non abbiamo i valori di $s$, e di $u$, e quindi

di $F.x$, e di $f.x$ se non per le ascisse $x$ comprese tra i limiti o, ed $l$, chiamando $l$ la lunghezza della corda da un capo all'altro. Per conseguenza il metodo insegnato non può darci le funzioni $F(x+bt)$, $f(x-bt)$ se quando $x \pm bt$ trovasi compreso tra questi limiti. Ma il tempo $t$ cresce continuamente; e ogni poco basta a far che $x+bt$ diventi maggiore di $l$, ed $x-bt$ negativo; onde più non potremmo nella continuazione del tempo determinare il movimento e la figura della corda.

Soccorre a questo difetto un altra condizione data, la qual è che essendo fissi i due termini della corda, dovrà essere $y=0$ quando $x=0$; e quando $x=l$, qualunque sia $t$; onde abbiamo

$F.bt+f-bt=0$; $F(l+bt)+f(l-bt)=0$

potendo esser $t$ un qualunque numero positivo.

Dunque in generale

$F.z=-f.-z$; $F(l+z)=-f(l-z)$

essendo $z$ un numero positivo qualunque. Per cui se metteremo successivamente $l \pm z$, $2l \pm z$, $3l \pm z$ ec. avremo dalla prima equazione

$$F(l \pm z) = -f(-l \mp z)$$
$$F(2l \pm z) = -f(-2l \mp z)$$
$$F(3l \pm z) = -f(-3l \mp z)$$
$$F(4l \pm z) = -f(-4l \mp z) \text{ ec.}$$

e dalla seconda

$$F(2l \pm z) = -f . \mp z$$
$$F(3l \pm z) = -f(- \; l \mp z)$$
$$F(4l \pm z) = -f(-2l \mp z) \text{ ec.}$$

onde si traggono le seguenti conchiusioni

$$F.z = F(2l + z) = F(4l + z) \text{ ec.}$$
$$= -f(-2l - z) = -f(-4l - z) \text{ ec.}$$
$$f.z = f(-2l + z) = f(-4l + z) \text{ ec.}$$
$$= -F(2l - z) = -F(4l - z) \text{ ec.}$$

Dalla prima conchiusione si riconosce facilmente, che quando conosceremo il valore di $F.z$ per ogni numero $z$ compreso tra o ed $l$, potremo conoscerlo ancora per qualunque numero positivo, comunque maggiore di $l$. E similmente dalla seconda conchiusione si vede, come dato il valore di $f.z$ per ogni numero $z$ compreso fra o ed $l$, se ne deduce il valore di $f.z$ per ogni numero negativo. E così abbiamo quel che ci mancava a compiere il calcolo de' valori di $y$ indicato nell' articolo precedente.

208. *Coroll. VI.* Nell' equazione

$$y = F(x + bt) + f(x - bt)$$

si ponga successivamente $bt = 2l, 4l, 6l$ ec. Il primo termine prenderà di mano in mano i valori $F(2l + x)$, $F(4l + x)$ ec. tutti (207) eguali ad $F.x$. E il secondo termine i valori $f(-2l + x)$, $f(-4l + x)$ ec. tutti eguali ad $f.x$. Dunque rimarrà sem-

pre $y = F.x + f.x$ qual era al principio del moto.

Di qui si vede che la corda vibrante ritorna periodicamente al sito iniziale, ad eguali intervalli di tempo $= \frac{2l}{b}$.

209. *Coroll. VII.* Nella stessa equazione si ponga successivamente $bt = l$, $3l$, $5l$ ec. ma nello stesso tempo si trasporti l' origine delle ascisse nell' altro capo della corda, cangiando $x$ in $l - x$: Allora il primo termine $F(x + bt)$ divenuto $F(l - x + bt)$ prenderà successivamente i valori $F(2l - x)$, $F(4l - x)$ ec. tutti (207) eguali a $-f.x$. E l' altro termine $f(x - bt)$ divenuto $f(l - x - bt)$ acquisterà i valori $f. - x$, $f(-x - 2l)$ ec. tutti eguali a $-F.x$. Dunque sarà sempre $y = -F.x - f.x$; che è il valore iniziale, ma con segno contrario.

Di qui si vede che scorso dal principio del moto il tempo $t = \frac{l}{b}$, la corda ripiglia ancora la stessa curvatura di prima, ma doppiamente arrovesciata, vale a dire di sotto in su, e da destra a sinistra; ed a questa positura ritorna poi periodicamente ad intervalli di tempo $= \frac{2l}{b}$.

210. *Coroll. VIII.* Oscilla dunque la cor-

da alla guisa d'un pendolo, compiendo ciascuna oscillazione nel tempo $t = \frac{l}{b} = \frac{l\sqrt{hq}}{\sqrt{T}}$. Sono le sue vibrazioni isocrone, e sincrone a quelle d'un pendolo semplice di lunghezza $\frac{ghql^2}{\pi^2 T}$. Ed il numero delle vibrazioni fatte in egual tempo è in ragion composta della sudduplicata della tensione, dell' inversa della lunghezza, e dell'inversa sudduplicata della grossezza, e della densità.

211. *Coroll. IX.* Se non fu impresso alla corda alcun movimento iniziale, sarà $u = 0$; quindi $f.x = F.x$, ed $y = F(x+bt) + F(x-bt)$. Se la corda da principio era distesa in linea retta, sarà $s = 0$, onde $f.x = -F.x$, ed $y = F(x+bt) - F(x-bt)$. In ambedue i casi vi è una sola funzione da determinarsi, e il calcolo torna più semplice.

Del resto chi amasse vedere spiegata con minuta particolarità e con mirabile chiarezza la costruzion geometrica della corda vibrante, consulti una bellissima Dissertazione di Eulero nel Tomo Terzo delle Miscellanee di Torino.

## SEZIONE TERZA

### De' Principj dell' Idrostatica.

212. Così ne' sistemi fluidi come ne' solidi il principio delle velocità virtuali speditamente conduce a trovar le condizioni dell' equilibrio, e le leggi del moto. E ben tosto vedremo come dall' equazione ($A$) dell' art. 25. si ricavi l'equazion generale dell' equilibrio de' fluidi altrove prodotta. Se non che gioverà diffonderci alquanto più, onde chiarire il concetto della pressione che le particelle fluide esercitano scambievolmente; e vedere in qual senso debba intendersi quella comune opinione che questa pressione altramente operi ne' fluidi, altramente ne' solidi.

213. Una massa fluida continua è un aggregato di minimi elementi materiali contigui, sciolti da ogni vincolo di tenacità. Attesa l'indefinita loro picciolezza e la continuità della massa, possiamo attribuire all' elemento qual figura più ci piace; e tornerà comodo figurarlo nel parallelepipedo rettangolo $ZL$ (Fig. 17) delle dimensioni infinitesime $dx, dy, dz$. Sia $q$ la densità di que-

sto elemento; e sarà la sua massa $q\,dx\,dy\,dz$. Siano $P$, $Q$, $R$ le forze acceleratrici che lo sollecitano secondo le coordinate $x$, $y$, $z$; e saranno le forze motrici $Pq\,dx\,dy\,dz$, $Qq\,dx\,dy\,dz$, $Rq\,dx\,dy\,dz$.

214. Fingasi impresso alla massa equilibrata un moto minimo per cui l'elemento $ZL$ senza cangiar figura percorra secondo $x$, $y$, $z$ gli spazietti $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$. Saranno dunque $Pqdxdydz.\delta x$, $Qqdxdydz.\delta y$, $Rqdxdydz.\delta z$ i momenti (2) delle forze; la somma de' quali dovendo nell'equilibrio essere zero, sarà pel nostro sistema l'equazione ($A$)

$$0 = S.\,q\,dx\,dy\,dz\,(P\delta x + Q\delta y + R\delta z)$$

215. Ma qui le variazioni $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ non sono già indipendenti fra loro. Poichè gli elementi della massa essendo contigui, non può l'uno moversi senza spostare i vicini, nè può supporsi indifferentemente un moto qualunque in qualunque elemento. Adunque (27) converrà esprimere con acconce equazioni le condizioni particolari del sistema fluido, e queste combinare coll'equazione ($A$). Oppure (28) si dovranno considerare gli ostacoli che trattengono ciascuno elemento dal poter moversi indipendentemente dagli altri, e supponendo rimossi questi ostacoli sostituirvi delle forze eguali e contrarie all'azione dell'elemento contro i medesimi, aggiungendo poscia all'equazione ($A$) i mo-

menti di queste forze. Saranno allora in quella equazione tutte tre le variazioni arbitrarie ed indipendenti, e si dovrà porre eguale a zero il coefficiente di ciascuna.

216. Noi ci terremo a questo secondo metodo; e perchè l'ostacolo che impedisce alla particella fluida di trascorrere liberamente e indipendentemente dalle altre non può consistere che nella pressione che essa sostiene per ogni verso dalle particelle contermini, ricercheremo come operi, e come debba esprimersi questa pressione.

In un sistema continuo di elementi materiali che agiscono comunque l'uno sull'altro, prendasi un punto ad arbitrio determinato dalle ordinate $x$, $y$, $z$. Sia in quel punto una superficie minima $dk$. L'azione del sistema contro di questa superficie non può non esercitarsi (*) perpendicolarmente alla medesima, e però si ridurrà a due forze $pdk$, $p'dk$ che la premano normalmente spingendola da ambe le parti con direzioni opposte. E poichè le particelle del sistema non agiscono scambievolmente e non premono se non colle forze che si elidono, e si equilibrano insieme, converrà che queste due forze opposte siano anche eguali fra loro; onde $p' = p$. Posta la gravità $= 1$, ciascheduna di queste due forze può ra

sentarsi col peso d'un prisma di densità $=1$, di base $dk$, e d'altezza $p$.

217. Il valore di $p$ è lo stesso qualunque siasi l'inclinazione della base $dk$ ai piani delle $x$, $y$, $z$. Rappresenti $AB$ ( Fig. 18 ) in profilo codesta base $dk$, ed $AP$ rappresenti l'altezza $p$. S'intenda condotto per $A$ un piano con inclinazion qualunque alla $AB$, e sia questo rappresentato in profilo dalla retta $AL$ contenente coll' $AB$ un angolo qualunque $BAL = i$. Sia $AG$ la sezione del piano $AL$ col prisma eretto normalmente sulla $AB$, e sarà questa sezione $AG = \frac{AB}{\cos. i}$. Ora è manifesto che la forza $p$ premendo normalmente su tutti i punti l'area $AB$, preme obbliquamente su tutti i punti l'area $AG$; e se questa pressione obbliqua si decompone in due $PE$, $AE$, l'una normale, l'altra parallela ad $AG$, sarà la prima $PE = AP . \cos. i$. Adunque la pressione normale sull' area $AG$ sarà $PE . AG$ che torna eguale ad $AP . AB$. Di modo che se sul piano $AL$ si prende dal punto $A$ una base $= AB$, la pressione normale su questa base sarà tuttavia rappresentata dalla stessa altezza $AP$ o sia $p$.

218. Bensì varierà il valore di $p$ ne' varj punti del sistema, onde sarà $p$ funzione di $x$, $y$, $z$. E così se dalla base $AB$ cui ap-

partiene la pression $p$ passeremo a considerare un altra base $CD$ vicinissima ad $AB$, apparterrà a questa la pressione $p + dp$, riferendosi il differenziale $dp$ alla mutazione delle coordinate dal punto $A$ al punto $C$. E come la base $AB$ è premuta normalmente da ambe le parti colla forza $p . AB$, così sarà la $CD$ premuta normalmente d' ambe le parti con forza $(p + dp) . CD$.

219. Ritorniamo ora all' elemento $ZL$ (Fig. 17) della nostra massa fluida, e sia $p$ la pressione appartenente al punto $Z$; e poichè $p$ è funzione di $x, y, z$ facciasi $dp = L dx + M dy + N dz$; onde $L, M, N$ sieno le differenze parziali della $p$ relative alla mutazione delle $x$, delle $y$, delle $z$. La faccia $ZM = dy dz$ sarà premuta da ambedue le parti normalmente con forza $pdydz$. E la faccia eguale ed opposta $PL$ lo sarà similmente con forza $(p + L dx) dy dz$.

Allo stesso modo la faccia $ZN$ sarà premuta con forza $p dx dz$, e l' opposta $QL$ con forza $(p + M dy) dx dz$.

E la faccia superiore $ZK$ sosterrà la pressione $p dx dy$, e l' opposta inferiore $RL$ la pressione $(p + N dz) dx dy$.

220. Premesse queste cose venghiamo a considerare gli ostacoli (215) che frenano l' elemento dal trascorrere liberamente secondo le coordinate $x, y, z$. L' elemento

$ZL$ agisce contro quello che gli è contermine nella faccia $ZM$ colla forza $p\,dy\,dz$ diretta contro le $x$; e contro quello che gli è contermine nella faccia $PL$ colla forza $(p + L\,dx)\,dy\,dz$. Ora s' intendano rimossi gli elementi contigui, e sostituite ad essi delle forze eguali e contrarie alle azioni dell' elemento contro i medesimi. E l' elemento $ZL$ si troverà spinto contro le $x$ con forza $= L\,dx\,dy\,dz$.

Operando similmente per le altre due direzioni, si troverà l' elemento $ZL$ spinto dalla reazione degli ostacoli contro le $y$ con forza $= M\,dx\,dy\,dz$, e contro le $z$ con forza $= N\,dx\,dy\,dz$.

221. Poichè queste forze hanno direzione contraria alle coordinate, dovremo farle negative. Aggiunta poi all' equazione dell' art. 214. la somma de' loro momenti, diventerà l' equazione $(A)$ divisa per $dx\,dy\,dz$,

$$o = \text{S.}\left\{(Pq - L)\delta x + (Qq - M)\delta y + (Rq - N)\delta z\right\}$$

e posti eguali a zero i coefficienti delle singole variazioni, ne darà queste tre

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = Pq\ ;\ \left(\frac{dp}{dy}\right) = Qq\ ;\ \left(\frac{dp}{dz}\right) = Rq$$

222. Moltiplicandole rispettivamente per $dx$, $dy$, $dz$, e sommandole, si avrà

$$dp = q\,(P\,dx + Q\,dy + R\,dz)$$

223. Affine di eliminare $p$, si differenzierà la prima equazione per $y$ e la seconda per $x$; poi la prima per $z$ e la terza per $x$; finalmente la seconda per $z$, la terza per $y$; e il paragone delle differenze eguali darà queste tre equazioni

$$\left(\frac{d \,.\, Pq}{dy}\right) = \left(\frac{d \,.\, Qq}{dx}\right); \left(\frac{d \,.\, Pq}{dz}\right) = \left(\frac{d \,.\, Rq}{dx}\right);$$

$$\left(\frac{d \,.\, Qq}{dz}\right) = \left(\frac{d \,.\, Rq}{dy}\right)$$

E queste sono le condizioni dell' equilibrio della massa fluida. Si vede che queste condizioni si riducono al dover essere la formola $Pq\,dx + Qq\,dy + Rq\,dz$ una differenziale esatta.

224. Alla superficie libera del fluido dev' essere $p = 0$. Quindi l' equazione della superficie di livello (II. 13)

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$

E però se la massa fluida è d' ogni parte libera e aperta, dovrà l' intera sua superficie accomodarsi a questa equazione. Che se da qualche banda s' appoggia ad una parete resistente, basterà che la resistenza della parete sia in ciaschedun punto eguale o maggiore della forza $p$.

225. Prima di lasciare questa Teoria dell'equilibrio de' fluidi, sarà bene avvertire per qual modo essa contenga ed esprima il pro-

pio e particolar carattere che distingue i fluidi da' solidi; il qual carattere consiste nell' essere le particelle de' fluidi fra loro sconnesse, quelle de' solidi legate dalla tenacità.

Sin tanto che si considerano le sole forze attive che sollecitano gli elementi della massa, tutto quello che si è detto sinora egualmente conviene ad ogni massa continua, fluida o solida, che sia. E la pressione in quanto proviene dalle forze attive che si elidono, si esprime e si misura allo stesso modo ne' solidi, e ne' fluidi. E così negli uni come negli altri ella si diffonde ed opera egualmente per ogni verso.

Se non che ne' solidi interviene la tenacità, forza passiva, che non induce nè moto nè pressione alcuna, ma solamente resiste ad ogni moto tendente alla disgregazione delle parti, e vi resiste con forza più o men grande secondo la grandezza della forza che tende a produrre la separazione. Di quì avviene che ne' fluidi l'ostacolo al libero movimento di ciascuna particella procede unicamente dalla pressione contraria; ne' solidi procede di più dalla tenacità. L'equilibrio de' primi richiede che ogni particella colla propria forza si equilibri colla pressione delle molecole ambienti. L'equilibrio de' solidi si mantiene anche senza

questa condizione: poichè sebbene anche in questi la pressione operi per ogni verso, e la particella che trovasi stretta da forze diseguali tenda a muoversi cedendo alla pressione prevalente, tuttavia questo moto non ha luogo, impedito dalla tenacità, che operando anch' essa per ogni verso, contrasta alla sopradetta tendenza.

Ora la Teoria sin qui esposta, contando fra gli ostacoli che trattengono ogni elemento del sistema la sola pressione proveniente dalle forze attive, e non valutando la tenacità, esprime appunto e contiene la proprietà caratteristica de' sistemi fluidi.

226. A compimento di questa Sezione accennerò la dimostrazione diretta del Teorema fondamentale dell' equilibrio de' fluidi coi corpi immersi: Teorema che indirettamente fu dimostrato altrove (II. 52) con un brevissimo raziocinio. Sia $AQB$ (Fig. 19) la sezione del solido immerso. Intendiamo la capacità del solido divisa in colonne orizzontali sottilissime, e sia $Bq$ l' una di queste, terminata dalle due parti nelle basi inclinate $Bb$, $Qq$, e discosta dal livello per l' altezza $LB = z$. Rappresentano $BH$, $bH$ le projezioni dell' areola $Bb$ sopra due piani ortogonali, l' uno orizzontale condotto per $B$, l' altro verticale condotto per $b$. Ora la pressione $z . Bb$ che il fluido esercita nor-

malmente contro la base $Bb$ si risolva in due, l'una orizzontale secondo $BQ$, l'altra verticale secondo $BA$. Riuscirà la prima $= z . bH$, la seconda $= z . BH$. E dall'altra parte la pressione $z' . Qq$ si risolve similmente nelle due, $z . qK$ orizzontale, $z . QK$ verticale. Poichè $bH = qK$, è palese che le pressioni orizzontali esercitate sui termini opposti di ciascuna colonna si elidono scambievolmente, siccome quelle che sono eguali e contrarie.

Sia di nuovo la capacità del solido divisa in tante colonne verticali, come la $Ab$ terminata nelle basi $Aa$, $Bb$, essendo la base inferiore sotto il livello per l'altezza $LB = z$, e la superiore per l'altezza $LA = z'$. La pression normale $z' . Aa$ della base di sopra si risolve nelle due, $z' . aI$ orizzontale, $z' . AI$ verticale all'ingiù. Onde essendo $AI = BH$, è palese che la risultante delle pressioni verticali esercitate ne' due termini della colonna $Aq$ è la loro differenza $(z - z')\, BH$; eguale al peso della colonna fluida di cui tien luogo la $Aq$.

Di qui si vede, come le pressioni orizzontali si distruggono fra loro, e le verticali formano una risultante eguale ed opposta al peso della massa fluida spostata dal corpo.

Collo stesso progresso si dimostra anche il Teorema seguente (II. 53).

# SEZIONE QUARTA

## De' Principj dell' Idrodinamica.

### CAP. I.

*Teoria generale del moto de' fluidi.*

227. Se nella particella fluida elementare $ZL$ (Fig. 17) oltre le forze proprie $Pqdxdydz$, $Qqdxdydz$, $Rqdxdydz$ terrem conto anche delle forze (222) $-Ldxdydz$, $-Mdxdydz$, $-Ndxdydz$ provenienti dalla reazione degli ostacoli, formeremo immediatamente (84) pel moto dell' intera massa, l' equazione $(B)$, la quale dividendo il tutto per $qdxdydz$, e per $dt$, ci riuscirà

$$0 = S.\left(P - \frac{L}{q} - \frac{du}{dt}\right)\delta x + S.\left(Q - \frac{M}{q} - \frac{dv}{dt}\right)\delta y + S.\left(R - \frac{N}{q} - \frac{dw}{dt}\right)\delta z$$

E saranno le variazioni $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ affatto arbitrarie; onde eguagliati a zero i loro coefficienti, avremo le tre equazioni

$$\frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right) = P - \frac{du}{dt}$$

$$(G) \qquad \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dy}\right) = Q - \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dz}\right) = R - \frac{dw}{dt}$$

228. D' ordinario non si considerano se non che quei moti, ne' quali la massa rimane continua, mantenendosi sempre a contatto le particelle. Questa condizione della continuità ne somministra un' equazione di più. Il modo più appropriato di esprimerla è il seguente. Pongasi che nell' istante $dt$ l' elemento $ZL$ sia trapassato in $zl$. Procuriamo di esprimere analiticamente la variazione che ha subito in questo passaggio il volume $dx\,dy\,dz$, e la densità $q$. Se la massa si mantiene continua, è forza che la mutazione del volume sia reciproca della mutazione di densità; così che il prodotto del nuovo volume per la nuova densità rimanga tuttavia eguale a $q\,dx\,dy\,dz$. Questa eguaglianza ne darà l' equazione della continuità.

229. Cominciamo dal rintracciare la mutazione del volume. Poichè le velocità $u$, $v$, $w$ nel punto $Z$ sono funzioni delle quattro variabili $t$, $x$, $y$, $z$, esprimo i loro differenziali così

$$du = H\,dt + A\,dx + B\,dy + C\,dz$$
$$dv = H'dt + A'dx + B'dy + C'dz$$
$$dw = H''dt + A''dx + B''dy + C''dz.$$

Il punto $Z$ colle velocità $u$, $v$, $w$ trascorre nell' istante $dt$ gli spazietti $udt$, $vdt$, $wdt$ secondo le tre coordinate. Il punto $P$, il quale non differisce da $Z$ che per la $x$, avrà le velocità $u+Adx$, $v+A'dx$, $w+A''dx$ e però s o rerà contemporaneamente gli spazietti $(u+Adx)dt$, $(v+A'dx)dt$, $(w+A''dx)dt$. Cosicchè saranno le coordinate del punto $z$

$$x+udt\,;\; y+vdt\,;\; z+wdt$$

e quelle del punto $p$

$$x+udt+dx(1+Adt);\, y+vdt+A'dxdt;$$
$$z+wdt+A''dxdt$$

Pertanto se riferirò la posizione del punto $p$ al punto $z$ mediante le tre rette ortogonali $zf$, $fg$, $gp$ parallele alle coordinate, sarà

$$zf = dx(1+Adt);\; fg = A'dxdt;\; gp = A''dxdt.$$

Di quì si potrà calcolare $zp$ che è $= \sqrt{(zf^2 + fg^2 + gp^2)}$; e trascurando gl' infinitesimi di terzo ordine, riuscirà $zp = dx(1+Adt)$. E la deviazione $fzp$ di questo lato $zp$ dalla linea delle $x$ è infinitesima; poichè ha per coseno $\frac{zf}{zp}$, che negletti gl' infinitesimi di terz' ordine rimane $=1$. Nella stessa maniera si potranno indagare le traslazioni degli altri tre lati $QK$, $RN$, $ML$

eguali e paralleli a $ZP$, e si troverà che vengon tutti eguali a $dx(1+Adt)$ e deviano tutti pochissimo dalla direzione delle $x$.

Passando poscia al lato $ZQ=dy$ che si trasporta in $zq$, seguitando la stessa traccia di prima, si troverà $zq=dy(1+B'dt)$. E si troverà lo stesso valore pei lati $PK$, $RM$, $NL$ trapassati in $pk$, $rm$, $nl$. E tutti questi divergono infinitamente poco dalla direzione delle $y$.

Similmente il lato $ZR$, e suoi paralleli $PN$, $QM$, $KL$ passando in $zr$, $pn$, $qm$, $kl$ rimangono tutti $=zr=dz(1+C''dt)$ e declinano con angolo infinitesimo dalle $z$.

Così nell' istante $dt$ il parallepipedo rettangolo $ZL$ si trasforma nel parallelepipedo obbliquangolo $zl$, gli angoli del quale pochissimo differiscono da $90°$. La sua base è $=zp.zq.\sin.pzq$, e l' altezza differisce infinitamente poco da $zr.\cos.tzr$. E poichè l' angolo $pzq$ è infinitamente poco diverso dal retto, e l' angolo $tzr$ è infinitamente picciolo, sarà $\sin.pzq=\cos.tzr=1$. Onde il volume del parallepipedo $zl$, negletti gl' infinitesimi d' ordine superiore, è uguale al prodotto $zp.zq.zr$; o sia al prodotto

$$dx\,dy\,dz(1+Adt)(1+B'dt)(1+C''dt)$$

che trascurando pure gl' infinitesimi si riduce ad essere

$$dx\,dy\,dz(1 + A\,dt + B'\,dt + C''\,dt)$$

230. E ciò riguarda la mutazion del volume. Cerchiamo ora la mutazione della densità. Poichè la densità è funzione delle quattro variabili $t$, $x$, $y$, $z$ e poichè passando il punto $Z$ in $z$ crescono queste variabili cogl' incrementi $dt$, $u\,dt$, $v\,dt$, $w\,dt$, ne siegue che essendo $q$ la densità dell' elemento posto in $Z$, la densità dello stesso elemento passato in $z$ sarà

$$q + \left(\frac{dq}{dt}\right)dt + \left(\frac{dq}{dx}\right)udt + \left(\frac{dq}{dy}\right)vdt + \left(\frac{dq}{dz}\right)wdt$$

231. Moltiplichiamo ora il nuovo volume (229) per la nuova densità (230), ed eguagliamone (228) il prodotto a $q\,dx\,dy\,dz$. E dividendo il tutto per $dx\,dy\,dz$, e per $dt$, troveremo ridursi l'equazione a questa forma

$$(H)\ \left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d.qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.qw}{dz}\right) = 0$$

E questa è l' equazione della continuità, che negli Elementi d' Idraulica (II. 83) indicammo semplicemente col simbolo $kq = k'q'$, poichè allora non ci occorse di farne altro uso.

232. Se il fluido è incompressibile, la densità è la stessa in $zl$ come in $ZL$. Quindi pe' fluidi incompressibili, o liquidi, l' equazione ($H$) sciogliesi in queste due

$$(I) \quad \left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{dq}{dx}\right)u + \left(\frac{dq}{dy}\right)v + \left(\frac{dq}{dz}\right)w = 0$$

$$(K) \quad \left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0$$

233. Queste equazioni comprendono la Teoria generale, e quando potessero compiutamente integrarsi, compiutamente determinerebbero il moto.

Nei liquidi omogenei la densità è nota e costante; rimangono a determinare $u, v, w, p$ funzioni incognite di $t, x, y, z$; ed abbiamo appunto per determinarle le tre equazioni $(G)$ e l'equazione $(K)$.

Nei liquidi eterogenei v'è di più l'incognita $q$; ma v'è anche di più l'equazione $(I)$.

Finalmente ne' fluidi elastici, essendovi cinque funzioni incognite, non abbiamo che le tre equazioni $(G)$ e l'equazione $(H)$. Ma se sia nota la legge secondo cui la densità dipende o dalla sola pressione, o dalla pressione ed insieme dal sito che occupa la particella fluida, onde sia $q$ funzione nota di $p, x, y, z$, l'equazione che esprime codesta legge supplirà al difetto, e compirà la determinazione del moto.

Or tutta la difficoltà è riposta nell'integrare le equazioni fondamentali, e nel de-

terminar le funzioni arbitrarie che l'integrazione introduca. Ma questa difficoltà è grandissima, e se stiamo nella somma generalità, può dirsi insuperabile. Converrà dunque ristringersi a qualche ipotesi o caso particolare, in cui le proposte equazioni prendano una forma più trattabile. Questa ricerca sarà l'oggetto de' seguenti Capitoli.

## CAP. II.

### *Moto de' fluidi nello spazio.*

234. Qui ci ristringeremo ad esaminare il moto de' liquidi omogenei, onde non avremo a considerare se non che le tre equazioni ($G$) e l'equazione ($K$). Cominciando dalle prime, faccio la densità $q = 1$, e pongo in luogo de' differenziali $du$, $dv$, $dw$ le loro espressioni (229). Ed avvertendo essere $\frac{dx}{dt} = u$, $\frac{dy}{dt} = v$, $\frac{dz}{dt} = w$, le tre equazioni ($G$) diventeranno

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = P - H - Au - Bv - Cw$$

$$\left(\frac{dp}{dy}\right) = Q - H' - A'u - B'v - C'w$$

$$\left(\frac{dp}{dz}\right) = R - H'' - A''u - B''v - C''w$$

rimanendo l'equazione $(K)$

$$A + B' + C'' = 0$$

Da queste quattro equazioni a differenze parziali dovremo cercare la determinazione delle quattro funzioni incognite $u$, $v$, $w$, $p$.

235. Ma non è sperabile di poterle risolvere senza invocare qualche ipotesi acconcia ad agevolarne il calcolo. Torna opportuno a questo effetto il supporre che i due trinomj $Pdx + Qdy + Rdz$, $udx + vdy + wdz$ siano funzioni differenziali esatte delle variabili $x$, $y$, $z$. Ricevute per vere queste due ipotesi vedremo come proceda la risoluzione delle equazioni. Cercheremo appresso in quali casi possano queste supposizioni ammettersi con sicurezza.

236. *Proposizione I.* Ammesse le supposizioni dell' articolo precedente, determinare il moto del fluido.

Poichè $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ è differenziale esatto, sarà $\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right)$ o sia $B = A'$; e similmente $C = A''$, $C' = B''$. Con questo le tre equazioni $(G)$ divengono

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = P - H - Au - A'v - A''w$$

$$\left(\frac{dp}{dy}\right) = Q - H' - Bu - B'v - B''w$$

$$\left(\frac{dp}{dz}\right) = R - H'' - Cu - C'v - C''w$$

restando tuttavia l'equazione ($K$).

$$A + B' + C'' = 0 .$$

Ora per risolvere queste equazioni, pongasi $u\,dx + v\,dy + w\,dz = dk$, essendo $k$ una funzione indeterminata delle variabili $t$, $x$, $y$, $z$. Sarà

$$u = \left(\frac{dk}{dx}\right) \quad v = \left(\frac{dk}{dy}\right) \quad w = \left(\frac{dk}{dz}\right)$$

E l'equazione ($K$) diverrà tosto

$$\left(\frac{ddk}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddk}{dy^2}\right) + \left(\frac{ddk}{dz^2}\right) = 0$$

Venendo poscia alle equazioni ($G$) ne moltiplico la prima per $dx$, la seconda per $dy$, la terza per $dz$, e ne faccio la somma. Nella qual somma se io considero solamente per variabili $x$, $y$, $z$, e $t$ per costante, potrò fare

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) dx + \left(\frac{dp}{dy}\right) dy + \left(\frac{dp}{dz}\right) dz = dp$$

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = du$$

$$A'\,dx + B'\,dy + C'\,dz = dv$$

$$A''\,dx + B''\,dy + C''\,dz = dw$$

E di più sarà

$$Hdx + H'dy + H''dz = \left(\frac{du}{dt}\right)dx + \left(\frac{dv}{dt}\right)dy + \left(\frac{dw}{dt}\right)dz$$

$$= \left(\frac{ddk}{dtdx}\right)dx + \left(\frac{ddk}{dtdy}\right)dy + \left(\frac{ddk}{dtdz}\right)dz = d.\left(\frac{dk}{dt}\right)$$

Finalmente porrò $Pdx + Qdy + Rdz = dV$. Con tutte queste sostituzioni, la somma delle tre equazioni $(G)$ diventa

$$(L)\quad dp = dV - d.\left(\frac{dk}{dt}\right) - udu - vdv - wdw$$

la qual equazione integrata, considerando tuttavia $t$ siccome costante, ne dà

$$p = V - \left(\frac{dk}{dt}\right) - \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$$

237. *Coroll. I.* La risoluzione proposta si riduce in sostanza al trovare una funzione $k$, la quale compiutamente soddisfaccia all' equazione a differenze parziali

$$\left(\frac{ddk}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddk}{dy^2}\right) + \left(\frac{ddk}{dz^2}\right) = 0$$

Potrà questa funzione contenere in qualsivoglia modo la variabile $t$. Trovato il valore di $k$, restano determinati i valori delle quattro incognite $u$, $v$, $w$, $p$. Poichè $u = \left(\frac{dk}{dx}\right)$, $v = \left(\frac{dk}{dy}\right)$, $w = \left(\frac{dk}{dz}\right)$, e la $p$ si avrà mediante l'equazione ultima dell' articolo precedente.

238. *Coroll. II.* Quest' ultima equazione poichè si è ricavata supponendo $t$ costante esigerebbe l'aggiunta d'una funzione arbitraria di $t$; ma tien luogo di quest' aggiunta il termine $-\left(\frac{dk}{dt}\right)$ che appunto per quello

che si è detto pocanzi apparisce essere funzione arbitraria del tempo.

239. *Scolio*. Indicata la risoluzione del Problema nel caso che i due trinomj $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, $u\,dx + v\,dx + w\,dz$ siano integrabili, rimane ora ad investigare quando sia che una tal condizione abbia luogo. Quanto al primo trinomio, le forze attive operanti nella natura sono sempre tali, che esso risulta integrabile; siccome altrove (24) fu avvertito; cosicchè in que' movimenti de' fluidi ne' quali si prescinda dalle resistenze, può la prima condizione riceversi con sicurezza. D'ordinario si considera il fluido incitato dalla sola gravità $g$; allora chiamando $l$, $m$, $n$ gli angoli che fa la verticale cogli assi delle $x$, $y$, $z$ viene

$$V = g\,x\cos.l + g\,y\cos.m + g\,z\cos.n.$$

Quanto al trinomio $u\,dx + v\,dy + w\,dz$, la seguente Proposizione c' indicherà molti casi, ne' quali esso è sicuramente differenziale esatto.

240. *Proposizione II*. Se a qualche istante del moto il trinomio $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ sarà differenziale esatto, tale sarà per tutto il tempo del moto.

Suppongbiamo che avendo $t$ un determinato valore, si trovi $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ differenziale esatto. Sussisterà per quel tal valore di $t$ l'equazione ($L$); dalla quale abbiamo

$$\left(\frac{du}{dt}\right) dx + \left(\frac{dv}{dt}\right) dy + \left(\frac{dw}{dt}\right) dz =$$

$$dV - dp - u\,du - v\,dv - w\,dw$$

dove poichè il secondo membro è differenziale esatto, anche il primo dovrà esserlo.

Ora cangiandosi $t$ in $t + dt$, cangiasi $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ in

$$udx + vdy + wdz + \left(\frac{du}{dt}\right) dxdt + \left(\frac{dv}{dt}\right) dydt + \left(\frac{dw}{dt}\right) dzdt$$

Qui il primo trinomio è differenziale esatto per ipotesi, ed il secondo lo è per le cose pocanzi dette. Dunque $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ continua ad esser differenziale esatto anche nel tempo $t + dt$, e così procedendo di momento in momento, si vede che per tutto il tempo del moto seguirà ad esser tale.

241. *Coroll. I.* Viceversa se a qualche istante del moto $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ non è differenziale esatto, non potrà mai divenirlo.

242. *Coroll. II.* Frattanto si vede che quando al principio del moto sia quel trinomio integrabile, possiamo assicurarci che lo sarà sempre. Il che avverrà in moltissimi casi, e de' più frequenti. Ed in primo luogo quando il fluido parte dalla quiete, senza ricevere veruna impressione iniziale; poichè allora posto $t = 0$ sarà $u = v = w = 0$, onde ec.

243. *Coroll. III.* In secondo luogo quando il fluido essendo da prima in quiete, vie-

ne incitato da un impulso uniforme sulla sua superficie, come sarebbe dalla spinta d' un embolo. Poichè questa spinta produrrà una velocità eguale in ciascuna particella; onde posto $t = 0$, saranno le velocità $u$, $v$, $w$ costanti, onde ec.

244. *Coroll. IV.* In terzo luogo quand' anche l' impulso sulla superficie del fluido non fosse uniforme, ma variasse comunque da un punto all' altro, rimarrebbe tuttavia la formola $udx + vdy + wdz$ differenziale esatta. Poichè siano $u$, $v$, $w$ le velocità iniziali che quest' impulso produce in una particella qualunque della massa fluida. Si supponga che questa particella venga contemporaneamente investita dalle forze $-u$, $-v$, $-w$ le quali distruggano in essa quelle velocità iniziali. Egli è palese che l' intera massa con queste forze $-u$, $-v$, $-w$ applicate a ciascuna particella dovrà sostenersi in equilibrio contro la spinta esercitata alla superficie. Dunque (223) il trinomio $-udx - vdy - wdz$ dovrà essere differenziale esatto, onde ec.

245. *Coroll. V.* In quarto luogo quando le velocità $u$, $v$, $w$ sono e si mantengon sempre picciolissime, siccome accade nei minimi ondeggiamenti della superficie. Poichè allora nelle tre equazioni (*G*) dell' art. 234 potremo trascurare i termini $Au$, $Bu$ ec. sicco-

me infinitesimi di second' ordine. Moltiplicandole poi rispettivamente per $dx$, $dy$, $dz$ e sommandole, avremo

$$\left(\frac{du}{dt}\right)dx+\left(\frac{dv}{dt}\right)dy+\left(\frac{dw}{dt}\right)dz=dV-dp$$

Dovrà dunque il primo membro essere differenziale esatto; e quindi

$$\left(\frac{ddu}{dtdy}\right)=\left(\frac{ddv}{dtdx}\right);\ \left(\frac{ddu}{dtdz}\right)=\left(\frac{ddw}{dtdx}\right);$$

$$\left(\frac{ddv}{dtdz}\right)=\left(\frac{ddw}{dtdy}\right)$$

e quindi ancora

$$\left(\frac{du}{dy}\right)=\left(\frac{dv}{dx}\right);\ \left(\frac{du}{dz}\right)=\left(\frac{dw}{dx}\right);\ \left(\frac{dv}{dz}\right)=\left(\frac{dw}{dy}\right)$$

onde ec.

246. *Scolio*. Questa enumerazione comprende presso a poco tutti que' casi che sogliono occorrere nella comune Idrometria, e ci assicura del potere assumere ne' seguenti Problemi l' integrabilità della formola $udx+vdy+wdz$. Non è però che manchino dei casi ne' quali quella formola non è integrabile, e tuttavia il moto è possibile. Uno de' più semplici è il caso d' una mole fluida che con giro equabile si rivolga attorno un asse. Sia questo l' asse delle $z$, e sia $n$ la velocità angolare; sarà $u=ny$, $v=-nx$, $w=0$; ed $udx+vdy+wdz=$

$n(y\,dx - x\,dy)$ formola non integrabile. Tuttavolta questa posizione soddisfa all' equazione $(K)$, e le tre equazioni $(G)$ dell' art. 234. moltiplicate al solito per $dx$, $dy$, $dz$ danno per somma un equazione integrabile, di cui l' integrale è

$$p = V - \frac{1}{2} n^2 (x^2 + y^2)$$

## C A P. III.

*Moto de' fluidi in un piano.*

247. QUALCHE maggior progresso ci riuscirà di fare in questa determinazione analitica del moto de' fluidi, se questo moto si faccia secondo due sole dimensioni, così che tutto il sistema possa intendersi ridotto ad un solo piano, e a due sole coordinate $x$, $y$. E non è già questo caso di pura specolazione; poichè l' acqua fluente per gli acquidotti, o per gli alvei d' uniforme larghezza si muove appunto solamente per due versi, non potendo nissuna particella sviarsi dal piano che per essa condotto taglia per lo lungo il canale.

248. *Proposizione*. Determinare il moto del fluido in un piano.

La soluzione di questo Problema è conte-

nuta nel Problema più generale (236) già risoluto. L' equazione (*K*) si riduce a questa

$$\left(\frac{d\,d\,k}{d\,x^2}\right)+\left(\frac{d\,d\,k}{d\,y^2}\right)=0$$

che ha per integrale completo

$$k=\Phi\,(x+y\sqrt{-1})+\psi\,(x-y\sqrt{-1})$$

denotando $\Phi$, $\psi$ due funzioni arbitrarie, che posson anche inchiudere in qualsivoglia modo la variabile $t$. Determinata così la funzione $k$, si avranno (237) i valori delle tre incognite $u$, $v$, $p$. Sarà

$$u=F\,(x+y\sqrt{-1})+f\,(x-y\sqrt{-1})$$

$$v=\sqrt{-1}\,.\left(F\,(x+y\sqrt{-1})-f\,(x-y\sqrt{-1})\right)$$

dove le funzioni $F$, $f$ sono i coefficienti de' differenziali delle funzioni $\Phi$, $\psi$, e però indicano essi pure funzioni arbitrarie. E finalmente riuscirà

$$p=V-\left(\frac{dk}{dt}\right)-2F(x+y\sqrt{-1}).f(x-y\sqrt{-1})$$

dove sarà $V=\int(P\,d\,x+Q\,d\,y)$.

249. *Coroll. I.* Se il fluido è grave, e si prendono le $x$ verticali e rivolte al basso, sarà $V=g\,x$. Che se torni comodo di prendere per asse delle $x$ una retta pur volta al basso, ma inclinata alla verticale coll' angolo $l$, sarà $V=g\,x\cos.\,l-g\,y\sin.\,l$.

250. *Coroll. II.* Ponendo per $u$, ed $v$ i loro valori $\frac{d\,x}{d\,t}$, $\frac{d\,y}{d\,t}$, e poscia eliminando $dt$,

avremo l'equazion generale delle curve descritte da un punto qualunque del fluido. Questa sarà

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{-1}\,.\,\frac{F(x+y\sqrt{-1})-f(x-y\sqrt{-1})}{F(x+y\sqrt{-1})+f(x-y\sqrt{-1})}$$

che facilmente riducesi a quest' altra forma

$$\frac{dx-dy\sqrt{-1}}{dx+dy\sqrt{-1}}\,.\,f(x-y\sqrt{-1})-F(x+y\sqrt{-1})=0$$

251. *Scolio I.* Tutta la difficoltà adesso è ridotta al determinare le due funzioni arbitrarie $F$, $f$. Daremo un saggio del metodo che può tenersi, allor quando il fluido è ristretto d' ambe le parti fra pareti di nota figura, come sarebbe per entro un vaso o un tubo. Siano $y=\alpha$, $y=\beta$ le equazioni date delle due pareti; e siano $M$, $N$ i valori che prende la frazione $\frac{dx-dy\sqrt{-1}}{dx+dy\sqrt{-1}}$ allorchè in luogo di $y$ vi si ponga successivamente $\alpha$, e $\beta$. Avremo le due equazioni

$$Mf(x-\alpha\sqrt{-1})-F(x+\alpha\sqrt{-1})=0$$
$$Nf(x-\beta\sqrt{-1})-F(x+\beta\sqrt{-1})=0$$

nelle quali $M$, $N$, $\alpha$, $\beta$ saranno funzioni note della $x$.

252. *Scolio II.* Ora per cavare da queste equazioni la forma della funzione $F$, si può procedere a questo modo. Nella prima equazione in luogo di $x$ si ponga una funzione di $x$ tale che $x-\alpha\sqrt{-1}$ si converta in

$x - \beta\sqrt{-1}$. E supponendo che mediante questa permutazione $M$ si cangi in $M'$, ed $x + \alpha\sqrt{-1}$ si cangi in $x + \alpha'\sqrt{-1}$, la prima equazione diventerà

$$M' f(x - \beta\sqrt{-1}) - F(x + \alpha'\sqrt{-1}) = 0 .$$

Sostituendo nella seconda equazione il valore di $f(x - \beta\sqrt{-1})$ tratto da quest'ultima, avrò l'equazione

$$N F(x + \alpha'\sqrt{-1}) - M' F(x + \beta\sqrt{-1}) = 0 .$$

la quale comprende la sola funzione $F$. Pongasi adesso

$$x + \beta\sqrt{-1} = s \; ; \; x + \alpha'\sqrt{-1} = s + \Delta s$$

onde sia $\Delta s = (\alpha' - \beta)\sqrt{-1}$; ed avrò

$$N F(s + \Delta s) - M' F . s = 0$$

equazione a differenze finite, nella quale i coefficienti $N$, $M'$ sono funzioni note di $x$, e per conseguenza anche di $s$. S' integri questa equazione, avvertendo essere $\Delta s = (\alpha' - \beta)\sqrt{-1}$; e l'integrale ci manifesterà la ricercata funzione $F . s$.

L'altra funzione $f$ si determina con un progresso affatto simile, cangiando nella prima equazione (251) la $x$ in modo che $x + \alpha\sqrt{-1}$ diventi $= x + \beta\sqrt{-1}$; e supponendo che per tal cambiamento $M$ si converta in $M''$, ed $x - \alpha\sqrt{-1}$ in $x - \alpha''\sqrt{-1}$, la prima equazione diventerà

$$M'' f(x - \alpha''\sqrt{-1}) - F(x + \beta\sqrt{-1}) = 0$$

e combinata colla seconda darà

$$Nf(x-\beta\sqrt{-1})-M''f(x-\alpha''\sqrt{-1})=0$$

Pongasi $x-\beta\sqrt{-1}=s$; $x-\alpha''\sqrt{-1}=s+\Delta s$ ed avrò l'equazione

$$Nf.s-M''f(s+\Delta s)=0$$

da integrarsi posto $\Delta s=(\beta-\alpha'')\sqrt{-1}$.

253. *Scolio III.* Tutto questo progresso diviene assai più semplice, quando il vaso sia simmetrico attorno l'asse delle $x$, o più generalmente quando le particelle scorrenti per l'asse delle $x$ mai non deflettano dal medesimo, di modo che posto $y=0$, venga $v=0$. Poichè allora sarà $F.x=f.x$ ed una sola funzione ci resterà a determinare.

In questo caso sia $y=\alpha$ l'equazione data della parete; ed avremo

$$MF(x-\alpha\sqrt{-1})-F(x+\alpha\sqrt{-1})=0$$

dove se immediatamente porrò

$$x-\alpha\sqrt{-1}=s\,;\ x+\alpha\sqrt{-1}=s+\Delta s$$

avrò l'equazione

$$MF.s-F(s+\Delta s)=0$$

da integrarsi posto $\Delta s=2\alpha\sqrt{-1}$.

254. *Scolio IV.* Sia per esempio la parete rettilinea, e la sua equazione $y=bx$. Avremo $M=\frac{1-b\sqrt{-1}}{1+b\sqrt{-1}}$, $\alpha=bx$; e posto

$$x-bx\sqrt{-1}=s\,;\ x+bx\sqrt{-1}=s+\Delta s$$

sarà $\Delta s=2bx\sqrt{-1}=\frac{2bs\sqrt{-1}}{1-b\sqrt{-1}}$. Integrata con questo valore della differenza $\Delta$

l' equazione

$$\frac{1-b\sqrt{-1}}{1+b\sqrt{-1}}F.s-F(s+\Delta s)=0$$

ne dà $F.s=\frac{A}{s}$, essendo $A$ una costante, o piu tosto una funzione arbitraria del tempo. Quindi $F(x\pm y\sqrt{-1})=\frac{A}{x\pm y\sqrt{-1}}$ onde si trae

$$u=\frac{2Ax}{x^2+y^2};\ v=\frac{2Ay}{x^2+y^2};\ p=C+V-\frac{2A^2}{x^2+y^2}$$

## CAP. IV.

### *Moto lineare de' fluidi.*

255. Col ristringere la corrente fluida ad un piano siamo pervenuti a poter integrare le equazioni del moto; se non che rimane tuttavia malagevole la determinazione delle funzioni arbitrarie. Appianaremo questa difficoltà con limitarci ad un caso ancor più particolare, ritenendo il supposto del moto fatto in un piano, ed aggiungendo di più la condizione che le ordinate $y$ rimangano sempre piccolissime. E per maggiore agevolezza supporremo ancora che le particelle scorrenti lungo l' asse delle $x$ non se

ne allontanino mai. Chiameremo questo moto *lineare*, siccome quello che segue la direzione della linea delle $x$, non deviandone se non che pochissimo.

256. *Proposizione*. Determinare il moto lineare del fluido.

I valori già trovati (248) di $u$ ed $v$, per essere (253) $F.x = f.x$, diventano

$$u = F(x + y\sqrt{-1}) + F(x - y\sqrt{-1})$$

$$v = \sqrt{-1}\left\{F(x+y\sqrt{-1}) - F(x-y\sqrt{-1})\right\}$$

Svolgo queste funzioni in serie, mediante il Teorema di Taylor; e scomparendo gl' immaginarj, ritrovo

$$u = F.x - \frac{y^2}{2}F''.x + \frac{y^4}{2.3.4}F^{IV}.x - \text{ec.}$$

$$v = -yF'.x + \frac{y^3}{2.3}F'''.x - \frac{y^5}{2.3.4.5}F^{V}.x + \text{ec.}$$

dove i simboli $F'.x$, $F''.x$ ec. contrassegnano conforme alla notazione già ricevuta i coefficienti de' differenziali primo, secondo ec. della funzione $F.x$. Ora perchè le ordinate $y$ sono per l' ipotesi picciolissime, abbiansi per infinitesime, e così trascurando gl' infinitesimi di second' ordine, resterà

$$u = F.x \quad ; \quad v = -yF'.x$$

Abbiamo poi (248) $p = V - \left(\frac{dk}{dt}\right) - \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$.

Ora nel presente caso abbiamo (248)

$k = \Phi . x = \int dx F . x$, e neglette le quantità di secondo ordine abbiamo pure
$u^2 + v^2 = (F . x)^2$. Dunque

$$p = V - \left(\frac{d . \int dx F . x}{dt}\right) - \frac{1}{2}(F . x)^2$$

257. *Coroll. I.* L' equazione delle curve descritte da qualsivoglia punto del fluido (250) diventa qui $dx F . x + y dx F' . x = 0$, o sia integrando $y F . x =$ Cost.

258. *Coroll. II.* Di qui possiamo agevolmente determinare la forma della funzione $F . x$, la quale come altrove si è detto, oltre la $x$, può contenere in qualsivoglia modo la variabile $t$. Sia l' equazione della parete del vaso $y = z$; e dovrà essere $z F . x =$ Cost. Affine di determinar la costante, chiamo $c$ la velocità in una data sezion del vaso $= f$. Sarà $u = c$, quando $z = f$. Quindi Cost. $= fc$, onde $F . x = \frac{fc}{z}$. E si noti che $c$ non è già una costante, ma una funzione arbitraria del tempo, che resta ancora a determinare.

259. *Coroll. III.* Determinata così la funzione $F . x$, si avrà (256)

$$u = \frac{fc}{z} \quad ; \quad v = \frac{fc\,dz}{z^2\,dx}$$

$$p = C + V - \frac{f\,dc}{dt}\int\frac{dx}{z} - \frac{f^2 c^2}{2 z^2}$$

L'arbitraria $C$ che proviene dall' integrazione di $\int dx F.x$, è ancor essa una funzione del tempo, tuttora indeterminata.

260. *Coroll. IV.* Se la direttrice è verticale, sarà $V = gx$; se inclinata alla verticale coll'angolo $\phi$, sarà $V = gx \cos.\phi - gy \sin.\phi$.

Ma potrebbe darsi caso che la direttrice del moto fosse una curva. Niente vieta di prendere per asse delle $x$ questa linea, tuttochè curva, riguardando gli archi della medesima siccome ascisse. Se non che allora la formola $P dx + Q dy$ più non sarebbe differenziale esatta, e così verrebbe meno una (235) delle ipotesi fondamentali. Infatti quella formola diviene $g dx \cos.\phi - g dy \sin.\phi$, che essendo $\phi$ variabile e funzione della sola $x$, non può riuscire differenziale esatta.

Si può rimovere questo inconveniente col considerare in ogni elemento fluido siccome attiva quella sola parte della gravità che si esercita secondo la linea direttrice, trascurando siccome forza morta l'altra parte che si esercita normalmente alla direttrice. E così potremo fare generalmente $V = g\int dx \cos.\phi$. Al valore della pressione che si otterrà dalla formola (259) converrà poi aggiungere la pressione che proviene dal conato della gravità normale alla direttrice, conforme altra volta s' avvertì (II. 94).

261. *Coroll. V.* Essendo la direttrice o linea delle $x$ comunque inclinata o incurvata, se vorremo in luogo della $x$ introdurre un ascissa verticale $Z$, sarà $dZ = dx \cos. \phi$. Quindi le nostre formole (259) diventeranno

$$u = \frac{fc}{z} \quad ; \quad v = \frac{fc\,dz \cos. \phi}{z'\,dZ}$$

$$p = C + gZ - \frac{fdc}{dt}\int \frac{dZ}{z \cos. \phi} - \frac{f'c'}{zz'}$$

Questi valori confrontano puntualmente con quelli che trovammo altrove (*II.* 93) indicandosi allora colle lettere $gp$, $z$, $y$ quello che qui notiamo colle lettere $p$, $Z$, $z$.

262. *Scolio I.* Prendemmo allora per supposto (II. 88.) che tutti i punti d'una sezione normale alla direttrice camminino con pari velocità a seconda della direttrice stessa. Il che è quanto dire, che le dette sezioni si mantengano sempre piane e normali alla direttrice, e se questa è rettilinea, si conservino parallele a lor medesime. Ora siamo per altra strada pervenuti agli stessi risultati, senz' altro supposto fuorchè di trascurare le altre due dimensioni della corrente in paragone della lunghezza, considerando l'una di queste siccome nulla, e l'altra siccome picciolissima. Questo confronto fa vedere che l'ipotesi del parallelismo degli strati non è vera a tutto rigore, ma può ri-

tenersi per un approssimazione, mentre si riguardino le ampiezze del vaso siccome quantità picciolissime, o infinitesime di primo ordine, e si trascurino quelle di second' ordine.

## CAP. V.

*Problemi sul moto lineare de' fluidi.*

263. Come si debbano determinare le funzioni $C$, $c$, e come in seguito si debba ordinare il calcolo all' effetto di scoprire la velocità dell' efflusso, e la pressione sopra ciascun punto delle pareti, fu dichiarato abbastanza (II. 95) negli Elementi. Or ne' seguenti Problemi ne mostreremo qualche applicazione.

264. *Proposizione I.* Determinare la velocità dell' efflusso da un vaso prismatico inesausto, essendo la direttrice una retta verticale.

Serve pei vasi inesausti (II. 96) l' equazione ($E$). Conserveremo le stesse denominazioni d' allora, e poichè il vaso è prismatico e verticale, sarà $y = m$, cos. $\Phi = 1$, $M - N = \frac{h-k}{m}$; supporremo $A = B$, e fa-

remo per brevità l'altezza costante dell'acqua nel vaso $k - h = H$, ed $1 - \frac{f^2}{m^2} = n$.

L'equazione ($E$) diviene

$$dt = \frac{2fHdc}{2gmH - mnc^2}$$

S'integri in modo che $t = 0$ dia $c = 0$, e facendo per maggior compendio $\frac{m\sqrt{2gn}}{f\sqrt{H}} = b$, si otterrà

$$t = \frac{1}{b}\,\text{Log.}\,\frac{\sqrt{2gH} + c\sqrt{n}}{\sqrt{2gH} - c\sqrt{n}};\quad \text{onde}$$

$$c = \frac{\sqrt{2gH}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{e^{bt} - 1}{e^{bt} + 1}$$

E l'altezza dovuta alla velocità dello sbocco

$$s = \frac{H}{n}\left(\frac{e^{bt} - 1}{e^{bt} + 1}\right)^2.$$

265. *Coroll. I.* Quest' altezza non può oltrepassare il limite $\frac{H}{n}$, ed anzi rigorosamente non vi arriva giammai. Bensì per poco che $m$ sia grande in paragone di $f$, il limite diventa prossimamente $= H$, e dopo un tempo cortissimo la velocità dell'efflusso vi si accosta tanto che la differenza è impercettibile. Quindi è che in pratica gli ef-

flussi da vasi inesausti per anguste luci sin dal principio si ponno riguardare come permanenti.

266. *Coroll. II.* Per mostrarne un esempio, sia $m = 10f$, $H = 2g$. Essendo $f$ abbastanza picciolo rispetto di $m$, molto più lo sarà $f'$ rispetto di $m'$, e potremo fare $n = 1$, onde $b = 10$. Or calcolando il valore di $s$, se mettiamo $t = \frac{1}{2}$, ci verrà $s = 0,973\,H$; ove si vede che dopo un mezzo minuto secondo, l'altezza dovuta alla velocità non differisce di tre centesimi dall'altezza dell'acqua nel vaso. Posto $t = 1$, viene $s = 0,999\,H$, e la differenza è quasi del tutto svanita. Più rapido ancora sarebbe il progresso della velocità verso il suo limite, se il vaso non fosse così alto.

267. *Coroll. III.* Merita singolare avvertenza il caso ove sia $m = f$, vale a dire il vaso senza fondo; abbiamo allora $n = 0$, $b = 0$; onde $s = \frac{0}{0}$. Ma risalendo all'equazione differenziale, che diventa $g\,dt = dc$, ne abbiamo immediatamente $c = gt$. Il che mostra che la velocità dell'efflusso va crescendo equabilmente senza alcun limite. Nè potrebbe infatti accadere diversamente. Imperocchè in questo caso la superficie insieme

con tutta la mole dell' acqua discende con moto uniformemente accelerato. E poichè l' acqua si rifonde per di sopra con velocità eguale a quella con cui discende la superficie, essa ancora subentra con velocità sempre maggiore; e così cresce all' infinito e la velocità dell' ingresso, e la velocità dello sbocco.

Il perchè non è maraviglia se la formola (II. 100) che esprime la velocità permanente dell' efflusso dia per questo caso $s = \infty$; giacchè realmente la velocità in questo caso non ha altro limite che l' infinito.

268. *Coroll. IV.* Se l' acqua per mantener pieno il vaso si rifonde con velocità differente da quella con cui va discendendo la superficie, e sia $k$ il rapporto della velocità dell' acqua affluente a quella della superficie, conviene (II. 141) in luogo di $A$ porre $A + (k - 1) \frac{f^2 c^2}{g m^2}$. Fatta questa mutazione, si troverà che servono le stesse formole (264) purchè in luogo di $n$ vi si metta

$$n - 2 (k - 1) \frac{f^2}{m^2}.$$

E così se l' acqua si affonda lateralmente, onde sia $k = 0$, in luogo di $n$ si scriverà

$$n + \frac{2 f^2}{m^2}.$$

269. *Scolio I.* Daniello Bernulli tratta que-

sto caso dell' afflusso con diverso metodo, il quale anche lo conduce a diverso risultato. Egli nell' equazione $(E)$ al termine $\frac{f^2 c^2}{2 g m^2}$ che rappresenta l' altezza dovuta alla velocità nella superficie del fluido, sostituisce $\frac{k^2 f^2 c^2}{2 g m^2}$ che rappresenta l' altezza dovuta alla velocità dell' acqua affluente. Ciò torna al medesimo che se in luogo di $A$ si ponesse $A + (k^2 - 1) \frac{f^2 c^2}{2 g m^2}$. Per adattare a questa soluzione le nostre formole (264) converrebbe in luogo di $n$ porvi $n - (k^2 - 1) \frac{f^2}{m^2}$.

E nel caso dell' afflusso laterale, in luogo di $n$, convien porre $n + \frac{f^2}{m^2}$ o sia 1.

270. *Scolio II.* Poichè i risultati non s' accordano, è forza dire che l' uno dei due metodi sia fallace. Nel primo (268) che fu seguito dal Sig. d' Alembert, la pressione addizionale si misura dalla massa affluente moltiplicata per la velocità estinta. Nel metodo Bernulliano questa pressione viene a misurarsi dalla differenza tra l' altezza dovuta alla velocità dell' afflusso, e l' altezza dovuta alla velocità della superficie. Ma di quest' ul-

tima misura non so vedere sicurò fondamento, mentre all'incontro la prima apparisce fondata su quei principj certissimi coi quali si misura universalmente l'urto de' corpi così solidi, come fluidi (I. 303. II. 314).

Ne avremmo senza dubbio la conferma, se potessimo confrontare colle sperienze i risultati dei due metodi. Ma queste prove son troppo malagevoli a farsi quando il foro non è molto angusto in paragone della superficie; e se il foro è angusto, i risultati d'entrambi i metodi si avvicinano tanto, che la differenza non sarebbe osservabile.

271. *Proposizione II.* Determinare la velocità dell'efflusso da un vaso prismatico verticale, che per l'efflusso si vuoti.

Serve pei vasi che si vuotano (II. 97) l'equazione $(F)$. Quì pure abbiamo $A = B$, $y = m$, e costante; cos. $\Phi =$ cos. $\Phi' = 1$, $M - N = \frac{h - k}{m}$. Sarà poi comodo invece della $h$ introdurre un ascissa verticale $x$ che dal centro del foro proceda all'insù, ponendo $k - h = x$; come anche in luogo della velocità $c$ introdurre l'altezza $s$ a lei dovuta, ponendo $c^2 = 2gs$. Con questo l'equazione $(F)$ diviene

$$f^2 x ds - (m^2 - f^2) s dx = - m^2 x dx$$

Faccio per compendio $\frac{m^2}{f^2} = a$, $\frac{m^2 - f^2}{f^2} = b$;

ed ho l' equazione

$$x\,d\,s - b\,s\,d\,x = -a\,x\,d\,x$$

che si rende integrabile col moltiplicarla per $x^{-b-1}$; ed integrata così che $x = H$ dia $s = 0$, ne darà

$$s = \frac{a\,H}{b-1}\left(\frac{x}{H} - \frac{x^b}{H^b}\right)$$

272. *Coroll. I.* Se $f^2$ è piccolissimo rispetto di $m^2$, riesce $a = b$, e grandissimo rispetto dell' unità. Quindi la frazione $\frac{x}{H}$ elevata all' esponente altissimo $b$ diventa minima, e riesce $s = x$.

Se $f^2 = m^2$, talchè il vaso sia senza fondo, riesce $a = 1$, $b = 0$, ed $s = H - x$, come è manifesto dover essere.

273. *Coroll. II.* Se fosse $m^2 = 2f^2$, sarebbe $a = 2$, $b = 1$, onde $s$ risulta zero diviso per zero. Conviene allora ritornare all' equazion differenziale, che diventa $x\,d\,s - s\,d\,x = -2\,x\,d\,x$; e divisa per $x^2$ ed integrata, darà $s = 2\,x \log. \frac{H}{x}$.

274. *Coroll. III.* Per trovare il tempo in cui l' acqua si abbassa per un determinato spazio, e acquista una determinata velocità, convien ricorrere all' equazione (II. 97) $m\,d\,h = f\,c\,d\,t$, o sia $d\,t = -\frac{d\,x\sqrt{a}}{\sqrt{2\,g\,s}}$, nel-

la quale in luogo di $s$ bisognerà sostituire il suo valore (271) in $x$; ma l'equazione che ne risulta, non può integrarsi se non che per serie.

Se però la luce è picciolissima, essendo allora $s = x$, si trova dopo l'integrazione

$$t = \sqrt{\frac{2b}{g}}(\sqrt{H} - \sqrt{x}).$$

275. *Coroll. IV.* La velocità dell'efflusso è nulla, quando $x = H$, e torna ad esser nulla, quando $x = 0$. Deve dunque esser massima in qualche intermedio valore di $x$, cui cercheremo nella seguente

276. *Proposizione III.* Determinare la massima velocità dell'efflusso dallo stesso vaso prismatico verticale.

Ove c è massimo, dovrà esserlo anche $s$; differenzierò dunque il valore di $s$ (271) ed eguagliato a zero il differenziale, avrò pel sito e pel valore della velocità massima

$$x = Hb^{\frac{1}{1-b}} \quad ; \quad s = aH \cdot b^{\frac{b}{1-b}}$$

277. *Coroll. I.* Onde ridurre ad espressione più comoda questi valori, allorchè il foro è molto angusto in confronto dell'ampiezza del vaso, noteremo che allora $b$ è numero altissimo, e quasi eguale ad $a$. Ora essendo $b$ numero altissimo, se faccio $b^{\frac{1}{b}} = 1 + i$, sa-

rà $i$ una frazion piccolissima; infatti elevando all'esponente $b$, avremmo $b=(1+i)^b$ dove se $i$ fosse zero o negativo, il secondo membro riuscirebbe minore del primo; e se $i$ fosse positivo bensì, ma non picciolissimo, riuscirebbe palesemente maggiore. Ora presupposto che $i$ sia un numero picciolissimo, prendendo i logaritmi, avremo

$\frac{1}{b}\log. b=\log.(1+i)=i$; onde finalmente

$$b^{\frac{1}{b}}=1+\frac{1}{b}\log. b$$

Similmente $b^{-\frac{1}{b}}=1:1+\frac{1}{b}\log. b=1-\frac{1}{b}\log. b$

giacchè essendo $\frac{1}{b}\log. b$ frazion picciolissima, svaniscono tutti gli altri termini che proverrebbero dal continuare la divisione.

278. *Coroll. II.* Avremo dunque pei fori picciolissimi

$$x=H-\frac{H}{b}\log. b \quad ; \quad s=\frac{aH}{b}$$

E così nel punto in cui s'acquista la massima velocità, la superficie dell'acqua nel vaso sarà discesa per l'altezza $\frac{H}{b}\log. b$, e

ne sarà uscita dal lume la quantità $\frac{mH}{b}$ log. $b$

279. *Coroll. III.* Per avere il tempo nel quale la velocità divien massima, nell'espressione di $t$ (274) conveniente ai fori piccolissimi, sostituiremo il valore di $x$ pur ora ritrovato; ed estraendo la radice per approssimazione, basteranno i due primi termini della serie; onde verrà

$$t = \sqrt{\frac{H}{2bg}} \times \text{Log. } b\,.$$

280. *Coroll. IV.* Questi valori ci mostrano, come essendo picciolo il lume, la velocità dell' efflusso sale rapidissimamente al valor massimo, il quale eguaglia a un dipresso l' altezza iniziale dell' acqua entro il vaso. Indi la velocità gradatamente declina a misura che l' acqua va discendendo. Quindi è che nella pratica, neglette le variazioni iniziali, può sempre riguardarsi la velocità dell' efflusso come dovuta all' altezza dell' acqua soprastante.

Per mostrar coll' esempio la tenuità di queste variazioni iniziali anche in un caso, ove esse non sono poi così piccole, ripiglieremo l' esempio precedente (266) supponendo $m = 10f$, $H = 2g$. Qui potrà farsi $b = a = 100$; onde sarà log. ip. $b = 4,6$. E calcolando le formole precedenti, trove-

tempo che la velocità dell' efflusso arriva al suo massimo nel tempo 0,'46", nel qual tempo la superficie si è abbassata dell' altezza 0,046 $H$.

281. *Proposizione IV.* In un vaso inesausto, dopo ridotto a permanenza l' efflusso, trovare quella sezione, ove la pressione è massima.

Eguaglio a zero il valore del $dp$ (II. 93) e pongo in grazia dello stato permanente $dc=0$. Avrò $gy^2\,dz+f^2\,c^2\,dy=0$. Ora se in luogo della $y$ metterò il suo valore in $z$ dato dalla nota figura del vaso, avrò da questa equazione l' ascissa $z$ indicante il luogo della pression massima; essendo altronde (II. 100) $c^2$ quantità cognita.

Ma sarà forse più comodo invece della $z$ stabilire un ascissa verticale $x$ che dal centro del foro proceda all' insù, ed invece della velocità $c$ introdurre l' altezza $s$ a lei dovuta. E con questo l' equazione del Problema diventerà

$$y^2\,dx=2f^2\,s\,dy.$$

282. *Coroll. I.* Abbia il vaso la forma d'un conoide parabolico, e le ordinate della parabola generatrice siano come le potestà $\frac{n}{2}$ delle ascisse. Le sezioni circolari del vaso sono come i quadrati de' loro raggi, o sia delle ordinate, e per conseguenza sono co-

me le potestà nesime delle ascisse corrispondenti. Pertanto se dicasi $l$ la distanza del vertice della parabola dal foro, sarà $y = \frac{f(l + x)^n}{l^n}$. Quindi l'equazion precedente darà pel sito della pression massima

$$x = (2 n l^{2n} s)^{\frac{1}{2n+1}} - l$$

La distanza $l$ si troverà facilmente, quando si conosca la ragione $\frac{f}{m}$ dell'ampiezza del foro a quella della superficie, e l'altezza $H$ dell'acqua sopra il foro; poichè sarà

$$m = \frac{f(l + H)^n}{l^n}; \text{ onde } l = \frac{H \sqrt[n]{f}}{\sqrt[n]{m} - \sqrt[n]{f}}$$

283. *Coroll. II.* Sia per esempio $m = 20 f$; l'altezza dell'acqua $H = 1$ metro; e la parabola generatrice del vaso sia la parabola Apolloniana, onde $n = 1$. Troveremo $l = 0,0526$; $x = 0,1243$; e la pression massima $p = A + 0,7873$.

Se il vaso fosse conico, avremmo $n = 2$; onde verrebbe $l = 0,2880$; $x = 0,1995$; e la pressione massima $p = A + 0,6787$.

284. *Coroll. III.* Questo sito della pressione massima ha ciò di particolare, che in esso l'acqua si accelera come se fosse affatto

libera ed isolata. Il che manifestamente appare dall'essere ivi $dp = 0$, e però (II. 91) $g\,d\,z = u\,d\,u$. Donde si vede che la sezione cui compete la pression massima divide la capacità del vaso in due tronchi molto fra loro diversi in ordine all'accelerazione dell' acqua per essi corrente. Nel tronco superiore l'acqua s'accelera meno che non farebbe per la semplice gravità; nel tronco inferiore assai più. Nel primo la scambievole azione fra gli strati acquei fa contrasto alla gravità, e tende a ritardare ciascuno strato, e così ne modera l'acceleramento. Per lo contrario nel tratto inferiore essa cospira colla gravità, e ne accresce l'effetto. E così la scala delle accelerazioni per le quali l'acqua dal sommo del vaso si conduce allo sbocco è molto diversa da quel che sarebbe se l'acqua cadesse liberamente; quantunque se il foro è piccolo, la velocità finale sia in ambi i casi la stessa.

285. *Coroll. IV.* Se la superficie del vaso e la sezione del foro si trovassero aggravate da pressioni diverse, la soluzion del Problema rimarrebbe tuttavia la medesima. Solo conviene avvertire che si dia in ciascun caso ad $s$ quel valore (II. 99. 100) che ad esso caso conviene.

E qui ben potrebbe accadere che $x$ divenisse eguale ad $H$, o maggiore di $H$; op-

pure che divenisse zero, o negativo. Ne' quali casi dovrà conchiudersi non esservi sezione alcuna nel vaso, ove la pressione diventi massima.

286. *Coroll. V.* Se il vaso fosse composto di due tronchi di forma differente, converrà prima calcolare (II. 169) la pressione che ha luogo nella sezion di confine fra un tronco e l'altro; poscia colla scorta dell'articolo precedente si cercherà il sito della pression massima separatamente in ognuno dei due tronchi. E qui potrà essere che s'incontri la pression massima in tutti due i tronchi, o in un solo de' medesimi, o anche in nessuno dei due.

Per vederne un esempio, sia il vaso parabolico alto metri 1,1369; e con esso sia continuato un tubo o imbuto conico alto m. 0,1624. Le sezioni supreme del vaso, e del tubo, e la sezione infima della luce siano nella ragione de' numeri 20,2,1. Fatto il calcolo, si troverà non farsi luogo alla pression massima se non che nel vaso, in sito distante dalla luce metri 0,2543.

Che se il vaso fosse lungo soltanto metri 0,8121 ed il tubo m. 0,4873, due luoghi si troverebbero per la pression massima; l'uno all'altezza di m. 0,5768, l'altro all'altezza di m. 0,4088 sopra la luce; ed il primo di questi appartiene al vaso, il secondo al tubo.

Colla stessa norma si troverà il luogo, o luoghi della pression massima in un vaso comunque composto di varj tronchi, o continuati fra loro, o anche discontinui.

287. *Coroll. VI.* Questa ricerca succede con eguale facilità ancora ne' vasi che per l'efflusso si vuotano, purchè la luce sia minima in paragone della superficie. E infatti il valore di $p$ (II. 110) differenziato e posto eguale a zero, conduce alla stessa equazione (281) di prima, se non che il valore di $s$ va cangiando, e con esso cangia la sede della pressione massima. E siccome appena schiuso il foro, la velocità dell'efflusso ascende prestissimo a quel valore che corrisponde all' altezza dell' acqua sovrastante, così anche il sito della massima pressione dal fondo del vaso sale rapidamente a quel luogo che vien determinato dall' equazione (281) postovi $s = H$. Poscia mentre la superficie si va abbassando, e sminuendosi il valore di $s$, anche il posto della massima pressione va gradatamente scendendo, e riducendosi verso il fondo.

pure che divenisse zero, o negativo. Ne' quali casi dovrà conchiudersi non esservi sezione alcuna nel vaso, ove la pressione diventi massima.

286. *Coroll. V.* Se il vaso fosse composto di due tronchi di forma differente, converrà prima calcolare (II. 109) la pressione che ha luogo nella sezion di confine fra un tronco e l'altro; poscia colla scorta dell'articolo precedente si cercherà il sito della pressione massima separatamente in ognuno dei due tronchi. E qui potrà essere che s'incontri la pression massima in tutti due i tronchi, o in un solo de' medesimi, o anche in nessuno dei due.

Per vederne un esempio, sia il vaso parabolico alto metri 1,1369; e con esso sia continuato un tubo o imbuto conico alto m. 0,1624. Le sezioni supreme del vaso, e del tubo, e la sezione infima della luce siano nella ragione de' numeri 20,2,1. Fatto il calcolo, si troverà non farsi luogo alla pression massima se non che nel vaso, in sito distante dalla luce metri 0,2543.

Che se il vaso fosse lungo soltanto metri 0,8121 ed il tubo m. 0,4873, due luoghi si troverebbero per la pression massima; l'uno all'altezza di m. 0,5708, l'altro all'altezza di m. 0,4088 sopra la luce; ed il primo di questi appartiene al vaso, il secondo al tubo.

Colla stessa norma si troverà il luogo, o luoghi della pression massima in un vaso comunque composto di varj tronchi, o continuati fra loro, o anche discontinui.

287. *Coroll. VI.* Questa ricerca succede con eguale facilità ancora ne' vasi che per l'efflusso si vuotano, purchè la luce sia minima in paragone della superficie. E infatti il valore di $p$ (II. 119) differenziato e posto eguale a zero; conduce alla stessa equazione (281) di prima, se non che il valore di $s$ va cangiando, e con esso cangia la sede della pressione massima. E siccome appena schiuso il foro, la velocità dell' efflusso ascende prestissimo a quel valore che corrisponde all' altezza dell' acqua sovrastante, così anche il sito della massima pressione dal fondo del vaso sale rapidamente a quel luogo che vien determinato dall' equazione (281) postovi $s = H$. Poscia mentre la superficie si va abbassando, e sminuendosi il valore di $s$, anche il posto della massima pressione va gradatamente scendendo, e riducendosi verso il fondo.

## SEZIONE QUINTA

### Delle Forze Centrali.

288. PROPOSIZIONE I. Determinare il moto d'un corpo attratto da un centro immobile.

Sia $R$ la forza traente verso il centro; e sia $r$ il raggio vettore condotto dal centro al corpo. Prendo nel centro stesso l'origine delle coordinate ortogonali $x, y, z$ che determinano il luogo del corpo. E risolvendo in tre la forza $R$ secondo le tre coordinate, saranno queste tre forze $\frac{-Rx}{r}$, $\frac{-Ry}{r}$, $\frac{-Rz}{r}$. Quindi l'equazioni determinatrici del moto saranno (118) queste tre

$$\frac{ddx}{dt^2}+\frac{Rx}{r}=0;\ \frac{ddy}{dt^2}+\frac{Ry}{r}=0;\ \frac{ddz}{dt^2}+\frac{Rz}{r}=0$$

ove sarà $r^2=x^2+y^2+z^2$.

289. *Coroll. I.* Si moltiplichi la prima equazione per $\frac{x}{r}$, la seconda per $\frac{y}{r}$, la terza per $\frac{z}{r}$; e sommandole avremo

$$\frac{xddx+yddy+zddz}{rd}+R=0$$

Si moltiplichi la prima per $-y$, la seconda per $x$; e di nuovo sommandole avremo

$$\frac{d(xdy-ydx)}{dt^2}=0.$$

Finalmente si moltiplichi la prima per $\frac{-xz}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$, la seconda per $\frac{-yz}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$, la la terza per $\sqrt{(x^2+y^2)}$; e sommandole, ed invece di $x^2+y^2$ ponendo il suo equivalente $r^2-z^2$, troveremo

$$\frac{r^2 ddz-z(xddx+yddy+zddz)}{dt^2}=0.$$

Così trasformate le tre equazioni dell' articolo precedente, meglio ci scorgeranno alla determinazione del moto.

290. *Coroll. II.* Sia $q$ l' inclinazione del raggio $r$ al piano delle $x$ ed $y$; e sia $p$ l' angolo che fa la projezione di $r$ sul piano delle $x$, $y$ colla linea delle $x$. Mutiamo le coordinate, ed in luogo delle tre $x$, $y$, $z$ introduciamo le altre $r$, $p$, $q$ che egualmente determinano il luogo del mobile. Sarà $x=r\cos.p\cos.q$; $y=r\sin.p\cos.q$; $z=r\sin.q$ Questi valori dovremo sostituire nelle equazioni (289) e per agevolar questa sostituzione avvertiremo essere

$dx^2+dy^2+dz^2=r^2dp^2\cos.q^2+r^2dq^2+dr^2$;

ed $xdx+ydy+zdz=rdr$; onde

$xddx+yddy+zddz=rddr-r^2dp^2\cos.q^2-r^2dq^2$

Ciò posto, le tre equazioni (289) si trasformano senza fatica in queste altre

$$\frac{ddr - rdp^2 \cos. q^2 - rdq^2}{dt^2} + R = 0$$

$$(M)\quad \frac{d.r^2 dp \cos. q^2}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d.r^2 dq + r^2 dp^2 \sin. q \cos. q}{dt^2} = 0$$

291. *Coroll. III.* Ma il calcolo si faciliterà notabilmente se avvertiremo che la trajettoria descritta dal mobile è tutta distesa in un piano. Ed infatti se immaginiamo un piano condotto pel centro della forza $R$, e per la direzione della velocità da principio impressa al mobile, egli è evidente che da questo piano esso non si allontanerà mai. Prendendo adunque su questo le $x$ e le $y$, sarà $q = 0$, e $dq = 0$; col che rimangono solamente le due equazioni

$$\frac{ddr - rdp^2}{dt^2} + R = 0, \quad \frac{d.r^2 dp}{dt^2} = 0$$

Queste due equazioni s' integrano senza difficoltà. Già la seconda dà immediatamente $dp = \frac{A\,dt}{r^2}$. Sostituito poi questo valore nella prima, e quindi moltiplicandola per $dr$, indi integrando, verrà $\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{A^2}{r^2} + \int R dr = B$.

Quindi si ha

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\left(B - \int Rdr - \frac{A^2}{r^2}\right)}}; \; dp = \frac{Adr}{r^2\sqrt{\left(B - \int Rdr - \frac{A^2}{r^2}\right)}}$$

Quest' ultima è l' equazione della trajettoria; la prima poi dà a conoscere la situazione del corpo ad ogni istante.

292. *Coroll. IV.* Le aree percorse intorno al centro della forza, sono proporzionali ai tempi ne' quali si percorrono.

Questa proporzione fu dimostrata altrove (100); ed anche discende spontaneamente dall' equazione $dp = \frac{Adt}{r^2}$; onde $\frac{1}{2} r^2 dp = \frac{1}{2} Adt$. Infatti l' area elementare, o sia il triangolo formato dai due raggi vettori infinitamente vicini che chiudon l'angolo $dp$, è appunto $= \frac{1}{2} r^2 dp$. È dunque l' area elementare proporzionale all'elemento del tempo, onde ec.

293. *Coroll. V.* In ogni punto della trajettoria la velocità angolare $\frac{dp}{dt}$ è reciprocamente proporzionale al quadrato del raggio vettore.

Ancor questo segue immediatamente dalla stessa equazione $dp = \frac{Adt}{r^2}$.

294. *Coroll. VI* In ogni punto della trajettoria la velocità assoluta del mobile è reciprocamente proporzionale alla normale condotta dal centro sulla tangente.

Dicasi questa normale, $= n$. L'area elementare avendo per base l'archetto della curva $ds$, e per altezza la normale $n$, può esprimersi ancora col prodotto $\frac{1}{2}. nds$. Sarà dunque (292) $nds = r^2 dp = Adt$, onde $\frac{ds}{dt} = \frac{A}{n}$.

295. *Proposizione II.* Supposta la forza attraente reciprocamente proporzionale al quadrato della distanza dal centro, determinare la trajettoria.

Sia dunque $R = \frac{F}{r^2}$ essendo $F$ costante; sarà $\int R dr = -\frac{F}{r}$, e l'equazione della trajettoria $dp = \frac{Adr}{r^2 \sqrt{(B + \frac{F}{r} - \frac{A^2}{r^2})}}$.

Pongo $\frac{F}{2A} - \frac{A}{r} = z$, onde $\frac{Adr}{r^2} = -dz$, e l'equazione diviene $dp = \frac{-dz}{\sqrt{(B + \frac{F^2}{4A^2} - z^2)}}$

Ed integrando, $p = -P + \text{Arc. cos.} \frac{z}{\sqrt{(B + \frac{F^2}{4A^2})}}$ essendo $P$ una costante indeterminata. Quindi finalmente

$$\frac{F}{2A} - \frac{A}{r} = \sqrt{(B + \frac{F^2}{4A^2})} \times \text{Cos.}(p+P).$$

296. *Coroll. I.* E sin quì abbiamo le tre costanti arbitrarie $A$, $B$, $P$ introdotte mediante le tre integrazioni. A render più semplice l'equazion della curva, mutiamo le due prime costanti, ponendo

$$\frac{2A}{F} \sqrt{(B + \frac{F^2}{4A^2})} = e \; ; \; \frac{2A^2}{F} = a(1 - e^2)$$

Ed avremo

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos.(p + P)}$$

297. *Coroll. II.* Quando diventa $p = -P$, si ha il valor massimo di $r = a(1 + e)$; e questo è il massimo allontanamento del corpo dal centro della forza, o sia, per usare il termine ricevuto nella Teoria Planetaria, la distanza afelia. Per contrario quando diventa $p = 180° - P$, si ha il valor minimo di $r = a(1 - e)$; ed è questo il maggiore avvicinamento del mobile al centro della forza, o vogliam dire, la distanza perielia. Vedesi che i punti dell'afelio e del perielio

cadono in una stessa linea retta condotta pel centro. E la distanza media del corpo dal centro, o sia la semisomma delle due distanze afelia e perielia, risulta $= a$; e la loro semidifferenza $= ae$.

298. *Coroll. III.* Riportiamo la nostra curva a due coordinate rettangole $x$, $y$, costituendo l'origine di queste coordinate nel centro della forza, e l'asse delle $x$ sulla retta che passa per l'afelio, e per il perielio, onde sia $y = 0$ quando $p = -P$, e di nuovo, quando $p = 180° - P$. Sarà dunque $x = r \cos.(p + P)$, $y = r \sin.(p + P)$, onde l'equazione (296) diventa

$$y^2 + (1 - e^2)x^2 - 2ae(1 - e^2)x - a^2(1 - e^2)^2 = 0$$

ed apertamente dimostra essere la trajettoria una Sezione conica. Sarà questa o parabola, o ellisse o iperbola, secondo che il coefficiente $1 - e^2$ sarà zero, positivo, o negativo. E si ridurrà ad un circolo, quando sia $e = 0$.

299. *Coroll. IV.* Onde poi ravvisare gli elementi dell'orbita, trasportiamo l'origine delle coordinate nel vertice, ritraendo il principio delle $x$ al punto del perielio. Per tal effetto in luogo della $x$ si dovrà mettere $x - a(1 - e)$, e si avrà

$$y^2 + (1 - e^2)x^2 - 2a(1 - e^2)x = 0,$$

Onde facilmente si deriva essere il parametro dell'orbita $= 2a(1 - e^2)$; il semiasse

maggiore $=a$; il semiasse minore $=a\sqrt{(1-e^2)}$; l'eccentricità, o sia la distanza del foco dal centro della curva $=ae$.

300. *Coroll. V.* La distanza dal vertice al foco più vicino è $=a(1-e)$, ed al più lontano $=a(1+e)$. Per lo che essendo costituito il principio delle ascisse nel perielio, si vede che il centro della forza siede nel foco più vicino al perielio.

301. *Scolio.* Ora il decidere qual delle tre Sezioni Coniche sia per descrivere il mobile, e di questa segnare la positura e l'andamento, dipende, come è manifesto, dalla determinazione delle costanti $a$, $e$, $P$. E questa determinazione dipende dal sito iniziale del corpo, e dalla velocità e direzione, secondo cui fu da principio incamminato, siccome nella seguente Proposizione mostreremo.

302. *Proposizione III.* Data la situazione, la velocità e la direzione iniziale del mobile, determinarne e costruirne l'orbita.

Pongasi che da principio il mobile si trovasse alla distanza $f$ dal centro della forza, e sulla linea delle $x$ (288). Il che senza difficoltà deve accordarsi; giacchè la posizion degli assi essendo arbitraria, ben possiamo intendere l'asse delle $x$ costituito in guisa che passi pel luogo iniziale del corpo, cosicchè quando $t=0$, ed $r=f$, sia $p=0$.

Pongasi di più che il mobile fosse projetto con velocità $c$, e con tal direzione che faccia col raggio vettore $f$ l'angolo $i$.

Se con questi tre dati $f$, $c$, $i$ potremo determinare le tre costanti $A$, $B$, $P$, ovvero $a$, $e$, $P$, avremo sciolto il Problema. Poichè già il valore di $e$ determina (298) la specie della sezione conica descritta; aggiungendovi il valore di $a$ vengono a determinarsi (299) gli assi e il parametro; ed aggiungendovi per ultimo il valore di $P$, si determina (297) il punto del perielio o sia il vertice dell'orbita. Guidando infatti dal centro della forza una retta che faccia col raggio vettore iniziale $f$ l'angolo $180° - P$, e facendo la lunghezza di questa retta $= a(1-e)$, l'estremità di essa marcherà il punto del perielio.

Ora nell'equazione (296) posto $r = f$ deve essere $p = 0$. Quindi

$$1.° \quad f = \frac{a(1-e^2)}{1 - e \cos. P}$$

Risolvasi poi la velocità iniziale $c$ in due, l'una diretta secondo il raggio vettore, e l'altra ad esso normale. Sarà la prima $c \cos. i$, la seconda $c \sin. i$. Dunque allorchè $t = 0$ ed $r = f$ dovrà essere $\frac{dr}{dt} = c \cos. i$, $\frac{rdp}{dt} = c \sin. i$.

Con questo le due equazioni integrali dell'

art. 291 daranno

$$A = cf \sin. i \quad ; \quad B = c^2 - \frac{F}{f}$$

e quindi (29()

2.° $a(1 - e^2) = \frac{2c^2 f^2 \sin. i^2}{F}$

3.° $1 - e^2 = \frac{4c^2 f \sin. i^2}{F} \left\{1 - \frac{c^2 f}{F}\right\}$

Da queste tre equazioni avremo le tre costanti $a$, $e$, $P$ espresse per le quantità note $f$, $c$, $i$; e così potremo costruire la trajettoria.

303. *Coroll. I.* E viceversa conoscendosi l'orbita descritta dal corpo; mediante le medesime equazioni potremo conoscere gli elementi $f$, $c$, $i$ attenenti al sito ed alla projezione iniziale del corpo.

304. *Coroll. II.* L'orbita sarà parabolica, quando sia $c^2 = \frac{F}{f}$. Sarà un iperbola, se $c^2 > \frac{F}{f}$. Sarà finalmente un ellisse, se $c < \frac{F}{f}$; e cangerassi l'ellisse in un circolo, quando sia $\sin. i = 1$, e $c^2 = \frac{F}{2f}$.

Ed è notabile come la specie della sezion conica descritta dal mobile non dipende

punto dalla direzione, ma soltanto dalla velocità della projezione iniziale.

305. *Proposizione IV.* Determinare ad ogni istante il luogo del mobile nella trajettoria.

A tal fine è d'uopo integrare l'equazione (291)

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\left(B + \frac{F}{r} - \frac{A^2}{r^2}\right)}}$$

ovvero, mutando le costanti, come all'art. 296

$$dt = \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{F}} \cdot \frac{r\,dr}{\sqrt{\left(a^2 e^2 - (r-a)^2\right)}}.$$

Faccio $r = a - ae \cos. u$; e l'equazione si trasforma nella

$$dt = (du - e\,du \cos. u)\sqrt{\frac{2a^3}{F}}$$

onde integrando

$$t + Q = (u - e \sin. u)\sqrt{\frac{2a^3}{F}}$$

La costante $Q$ dipende dal punto dell'orbita, donde vuol cominciarsi a contare i tempi. Se si conta dal perielio, dove $r = a - ae$, e per conseguenza $\cos. u = 1$, ed $u = \sin. u = 0$, potremo fare $Q = 0$, e

$$t = (u - e \sin. u)\sqrt{\frac{2a^3}{F}}$$

Per mezzo di questa equazione, ad ogni dato valore di $t$ potremo conoscere per ap-

prossimazione il valore di $u$ che vi corrisponde, e quindi avremo quello di $r$, dal quale dipendono $p$, $x$ ed $y$.

306. *Coroll. I.* Girando due corpi attorno lo stesso centro in virtù della stessa forza attrattiva, le aree descritte dall'uno e dall' altro in tempi eguali, sono come le radici de' parametri delle loro orbite.

Questa proporzione derivasi facilissimamente dall'essere l'area elementare $\frac{1}{2}r^2dp$ eguale ad $\frac{1}{2}Adt$, onde l'area stessa $=\frac{1}{2}At$, e però le aree percorse in tempi eguali, sono proporzionali ad $\frac{1}{2}A$. Ma (296) $\frac{1}{2}A=\sqrt{2aF(1-e^2)}$; e $2a(1-e^2)$ esprime (299) il parametro dell'orbita. Dunque ec.

307. *Coroll. II.* E viceversa i tempi ne' quali si percorrono aree eguali dall'uno e dall'altro de' corpi, sono inversamente proporzionali alle radici de' parametri delle orbite loro.

308. *Coroll. III.* Dicesi *Tempo periodico* quello che s'impiega a percorrere l'intera orbita, o sia quello che corre dal passare per il perielio al tornarvi.

Sia $T$ questo tempo. Partendosi il mobile dal perielio se io conto $t=0$, avrò $u=0$;

onde $\cos. u = 1$. Nel prossimo ritorno al perielio, dee tornare (305) $\cos. u = 1$, e quindi $u = 2\pi$, e $\sin. u = 0$, e

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2a^3}{F}}$$

che sarà il tempo periodico.

309. *Coroll. IV.* Girando due corpi intorno lo stesso centro in virtù della stessa forza attraente, i quadrati de' tempi periodici sono come i cubi degli assi maggiori delle loro orbite.

310. *Scolio I.* Nella Teoria Planetaria riguardasi la forza $F$ siccome effetto d'una massa residente nel centro, e si suppone ad essa massa proporzionale. Quindi l'attrazione de' centri si tiene essere in ragion composta della diretta delle masse traenti, e dell'inversa duplicata delle distanze. E la gravità terrestre si considera come una di queste forze attrattive, diretta al centro della Terra, nel qual s'intende raccolta l'intera massa del globo terracqueo. In tale ipotesi può richiamarsi a note misure il valore di $F$, e farne paragone colla gravità.

Sia $\mu$ la massa, e $\rho$ il raggio della Terra, la quale sulla sua superficie, e conseguentemente alla distanza $\rho$ dal centro esercita l'attrazione $g$ eguale alla gravità. Sia $m$ la massa di altro corpo che alla distanza $r$ eser-

cita la forza $\frac{F}{r^2}$. Poichè per ipotesi sono le forze attrattive nella ragion composta della diretta delle masse, e reciproca duplicata delle distanze, avremo la proporzione

$$\frac{\mu}{\rho^2} : \frac{m}{r^2} :: g : \frac{F}{r^2}; \text{ onde } F = \frac{m g \rho^2}{\mu}$$

311. *Scolio II.* Rivolgendosi due mobili, l'uno intorno una massa attraente, l'altro intorno un altra, saranno le masse attraenti nella ragion composta diretta de' cubi degli assi delle orbite da' rispettivi corpi descritte, ed inversa de' quadrati de' loro tempi periodici.

Abbiamo infatti (308) $F = \frac{8\,\mu^2\,a^3}{T^2}$; onde

(310) $m = \frac{8\,\pi^2\,\mu}{g\,\rho^2} \cdot \frac{a^3}{T^2}$.

312. *Proposizione V.* Determinare il moto d'un corpo attratto da due centri immobili.

Siano $R$, $S$ le forze traenti rispettivamente ai due centri; ed $r$, $s$ i raggi vettori che dai due centri si conducono al luogo ove trovasi il corpo. Prendo nel primo centro l'origine delle coordinate; e siano $a$, $b$, $c$ le coordinate del secondo centro, $x$, $y$, $z$ quelle del corpo. Risolvendo le forze $R$, $S$ giusta le tre coordinate, nascono dalla pri-

ma le forze $-\frac{Rx}{r}$, $-\frac{Ry}{r}$, $-\frac{Rz}{r}$; e dalla seconda le forze $-S.\frac{x-a}{s}$, $-S.\frac{y-b}{s}$, $-S.\frac{z-c}{s}$. Onde avremo, come prima (288) le tre equazioni

$$\frac{ddx}{dt^2}+\frac{Rx}{r}+\frac{S(x-a)}{s}=0$$

$$\frac{ddy}{dt^2}+\frac{Ry}{r}+\frac{S(y-b)}{s}=0$$

$$\frac{ddz}{dt^2}+\frac{Rz}{r}+\frac{S(z-c)}{s}=0$$

E qui sarà $r^2=x^2+y^2+z^2$; ed
$s^2=r^2-2(ax+by+cz)+a^2+b^2+c^2$.

313. *Coroll. I.* Se trasformiamo queste tre equazioni, come sopra si fece (289) è facile il vedere che proverranno le stesse trasformate d'allora, coll'aggiunta de' termini dovuti alla forza $S$. I quali termini da aggiungersi alle tre equazioni (289) facilmente si vede che saranno

Per la prima $\frac{S}{s}\left(r-\frac{ax+by+cz}{r}\right)$

Per la seconda $\frac{S}{s}(ay-bx)$

Per la terza $\frac{S}{s}\cdot\frac{axz+byz-cx^2-cy^2}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$

314. *Coroll. II.* Ora mutiamo le coordinate come prima (290) ponendo

$x = r\cos.p\cos.q$ ; $y = r\sin.p\cos.q$ ; $z = r\sin.q$

E per veder meglio quel che diventino le equazioni (*M*) coll' aggiunta dei termini poc anzi notati (313), osserviamo essere

$$\left(\frac{dx}{dr}\right) = \frac{x}{r} \; ; \quad \left(\frac{dy}{dr}\right) = \frac{y}{r} \; ; \quad \left(\frac{dz}{dr}\right) = \frac{z}{r}$$

$$\left(\frac{dx}{dp}\right) = -y \; ; \quad \left(\frac{dy}{dp}\right) = x \; ; \quad \left(\frac{dz}{dp}\right) = 0$$

$$\left(\frac{dx}{dq}\right) = \frac{-xz}{\sqrt{(x^2+y^2)}} ; \left(\frac{dy}{dq}\right) = \frac{-yz}{\sqrt{(x^2+y^2)}} ; \left(\frac{dz}{dq}\right) = \sqrt{(x^2+y^2)}.$$

E quindi

$$s\left(\frac{ds}{dr}\right) = r - . \frac{ax+by+cz}{r}$$

$$s\left(\frac{ds}{dp}\right) = ay - bx$$

$$s\left(\frac{ds}{dq}\right) = \frac{axz+byz-cx^2-cy^2}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$$

Onde si vede che all' equazioni (*M*) dell' art. 290. si dovranno aggiungere rispettivamente i termini $S\left(\frac{ds}{dr}\right)$, $S\left(\frac{ds}{dp}\right)$, $S\left(\frac{ds}{dq}\right)$.

315. *Coroll. III.* Se il mobile fosse attratto da tre centri, o da più, serviranno ancora le stesse equazioni, coll' aggiungervi

pel terzo centro, e per ciascuno degli altri de' termini analoghi a quelli che vi si sono aggiunti pel secondo. E così se vi fosse un terzo centro attraente colla forza $V$, chiamando $u$ il raggio vettore che da questo terzo centro si conduce al mobile, dovranno accrescersi all' equazioni $(M)$ in grazia di questo centro i termini $V\left(\frac{du}{dr}\right)$, $V\left(\frac{du}{dp}\right)$, $V\left(\frac{du}{dq}\right)$ rispettivamente.

316. *Coroll. IV.* Ritornando al caso di due soli centri, avvertirò che le equazioni riescon più semplici, quando si prenda per asse delle $z$, la retta che congiunge i due centri. Sarà allora $a=b=0$; e quindi $\left(\frac{ds}{dp}\right)=0$. E basterà alla prima delle equazioni $(M)$ accrescere il termine $\frac{S}{s}(r-c\sin.q)$, ed alla terza il termine $-\frac{S}{s}cr\cos.q$.

317. *Coroll. V.* Otterremo ancor maggiore facilità, allorquando la trajettoria descritta dal mobile giaccia tutta nello stesso piano. Il che avverrà se la direzione della projezione iniziale sia in quello stesso piano in cui sono i due centri. Allora potremo fare $q=0$, $dq=0$; e le equazioni si riducono

a queste due

$$\frac{ddr - rdp^2}{dt^2} + R + \frac{Sr}{s} = 0 \; ; \; \frac{d.r^2dp}{dt^2} = 0$$

Delle quali la seconda è l' istessa che si trovò all'art. 291, e s' integra allo stesso modo. Ma non si può proceder più innanzi, senza ricorrere a metodi d' approssimazione.

318. *Proposizione VI.* Determinare il moto di due corpi che scambievolmente si attraggono.

Si attraggano i corpi con forza $R$, e siano $M$ ed $m$ le loro masse. Preso per origine un punto fisso qualunque, siano $X, Y, Z$ le coordinate della massa $M$, o del suo centro di gravità; ed $X+x$, $Y+y$, $Z+z$ quelle della massa $m$. Sia finalmente $r$ la distanza delle due masse fra loro; onde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Poichè ciascun elemento della massa $m$ esercita sul corpo $M$ l' attrazione $R$, sarà $mR$ la forza onde questo corpo è sollecitato; la qual forza risolvendosi in tre giusta le direzioni delle coordinate, dà le tre forze $\frac{mRx}{r}$, $\frac{mRy}{r}$, $\frac{mRz}{r}$. Quindi avremo (118) pel moto del corpo $M$ queste tre equazioni

$$\frac{ddX}{dt^2} - \frac{mRx}{r} = 0 ; \quad \frac{ddY}{dt^2} - \frac{mRy}{r} = 0$$

(P)

$$\frac{ddZ}{dt^2} - \frac{mRz}{r} = 0$$

Similmente la forza acceleratrice che sollecita il corpo $m$, sarà $= MR$; e questa darà secondo le tre coordinate le tre forze $\frac{-MRx}{r}$, $\frac{-MRy}{r}$, $\frac{-MRz}{r}$. Onde avremo pel moto del corpo $m$ le tre equazioni

$$\frac{dd(X+x)}{dt^2} + \frac{MRx}{r} = 0 ; \quad \frac{dd(Y+y)}{dt^2} + \frac{MRy}{r} = 0$$

(Q)

$$\frac{dd(Z+z)}{dt^2} + \frac{MRz}{r} = 0$$

Con queste sei equazioni si determina il moto de' due corpi.

319. *Coroll. I.* Dalle equazioni (Q) si sottraggano l'equazioni (P) ciascuna da ciascuna, e si avrà

$$\frac{ddx}{dt^2} + (M+m)\frac{Rx}{r} = 0 , \quad \frac{ddy}{dt^2} + (M+m)\frac{Ry}{r} = 0$$

(T)

$$\frac{ddz}{dt^2} + (M+m)\frac{Rz}{r} = 0$$

Queste equazioni determinano il moto relativo del corpo $m$ rispetto di $M$; poichè non contengon altre variabili, se non che $x, y, z$ che sono appunto le coordinate di $m$ riferite al punto $M$.

Ora le suddette equazioni sono della stessa forma di quelle (288) che determinano il movimento d' un corpo attratto da un centro stabile. Dunque il corpo $m$ così per appunto si muove attorno il corpo $M$, come se questo fosse immobile, e lo attraesse con forza espressa da $(M+m)\,R$, ò sia proporzionale alla somma delle due masse. Girerà pertanto attorno il medesimo, descrivendo una sezion conica; ed abbiamo veduto come questa possa determinarsi e costruirsi, e come ad ogni istante di tempo possa conoscersi il valore delle coordinate $x$, $y$, $z$ che fissano la posizione del corpo $m$ relativamente ad $M$.

320. *Coroll. II.* Le equazioni (7) moltiplicate per $m$, si sommino colle equazioni (*P*) moltiplicate per $M+m$, ciascuna con ciascuna, e verrà

$$(M+m)\frac{ddX}{dt^2}+\frac{mddx}{dt^2}=0\,;\ (M+m)\frac{ddY}{dt^2}+\frac{mddy}{dt^2}=0$$

$$(M+m)\frac{ddZ}{dt^2}+\frac{mddz}{dt^2}=0$$

onde integrando

$$(M+m)\,X+m\,x=a+b\,t$$
$$(M+m)\,Y+m\,y=a'+b'\,t$$
$$(M+m)\,Z+m\,z=a''+b''t$$

essendo $a$, $b$ ec. costanti arbitrarie.

Conoscendosi pertanto ad ogni istante di

tempo (319) i valori di $x$, $y$, $z$, conosceremo quelli di $X$, $Y$, $Z$; e quindi ancora quelli di $X+x$, $Y+y$, $Z+z$. E così oltre il moto relativo del corpo $m$ attorno di $M$, verremo a conoscere i movimenti assoluti d'entrambi i corpi nello spazio.

321. *Coroll. III.* Se la massa $m$ è picciolissima in confronto della $M$, le tre equazioni precedenti si riducono a queste

$$MX=a+bt;\ MY=a'+b't;\ MZ=a''+b''t$$

Onde si vede che la grande massa $M$ o starà ferma, o non avrà se non quel movimento uniforme e rettilineo che può nascere dall'impulso iniziale che per avventura le fosse impresso. Pertanto la picciola massa non potrà colla sua attrazione comunicare alcun moto osservabile alla massa $M$, attorno alla quale come a centro stabile, seguirà rivolgendosi.

322. *Coroll. IV.* Se la forza attraente è reciprocamente proporzionale al quadrato della distanza, faremo $R=\frac{F}{r^2}$, ed anche potremo farlo $=\frac{1}{r^2}$, prendendo per unità la costante $F$. Il che non apporterà veruno imbarazzo, quando occorra richiamare a misure assolute il risultato de' calcoli, essendosi già mostrato (316) qual sia il valore

assoluto della $F$ nell' ipotesi Neutoniana, e potendosi colla medesima traccia rinvenirlo in ogni altra ipotesi.

323. *Proposizione VII.* Determinare il moto di tre corpi che scambievolmente si attraggono con forza proporzionale alla massa traente, e reciprocamente al quadrato della distanza.

Siano le masse de' tre corpi $M$, $m$, $m'$; ed $X$, $Y$, $Z$ le coordinate del primo, $X+x$, $Y+y$, $Z+z$ quelle del secondo, $X+x'$, $Y+y'$, $Z+z'$ quelle del terzo. E sia $r$ la distanza fra' corpi $M$, ed $m$; $s$ la distanza fra $M$ ed $m'$; $u$ la distanza fra $m$ ed $m'$. E così sarà $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$; $s^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$; $u^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2$.

Consideriamo da prima le forze che sollecitano il corpo $M$. Questo sarà tratto verso $m$ con forza $\frac{m}{r^2}$, e verso $m'$ con forza $\frac{m'}{s^2}$.

Le quali forze agenti nella direzione de' rispettivi raggi $r$, $s$ si dovranno ridurre al modo solito, risolvendo ciascuna in tre secondo le tre coordinate. E così avremo pel moto del corpo $M$ le equazioni

$$(a)\quad \begin{aligned} \frac{ddX}{dt^2} - \frac{mx}{r^3} - \frac{m'x'}{s^3} &= 0 \\ \frac{ddY}{dt^2} - \frac{my}{r^3} - \frac{m'y'}{s^3} &= 0 \\ \frac{ddZ}{dt^2} - \frac{mz}{r^3} - \frac{m'z'}{s^3} &= 0 \end{aligned}$$

Riguardiamo in secondo luogo il corpo $m$ tratto dagli altri due $M$ ed $m'$ colle forze $\frac{M}{r^2}$, $\frac{m'}{u^2}$. E riducendo queste forze alle direzioni delle coordinate, avremo pel corpo $m$

$$\frac{dd(X+x)}{dt^2}+\frac{Mx}{r^3}-\frac{m'(x'-x)}{u^3}=0$$

$$(b)\qquad \frac{dd(Y+y)}{dt^2}+\frac{My}{r^3}-\frac{m'(y'-y)}{u^3}=0$$

$$\frac{dd(Z+z)}{dt^2}+\frac{Mz}{r^3}-\frac{m'(z'-z)}{u^3}=0$$

Finalmente il corpo $m'$ sollecitato dalle attrazioni $\frac{M}{s^2}$, $\frac{m}{u^2}$ ne somministra collo stesso metodo le tre equazioni

$$\frac{dd(X+x')}{dt^2}+\frac{Mx'}{s^3}+\frac{m(x'-x)}{u^3}=0$$

$$(c)\qquad \frac{dd(Y+y')}{dt^2}+\frac{My'}{s^3}+\frac{m(y'-y)}{u^3}=0$$

$$\frac{dd(Z+z')}{dt^2}+\frac{Mz'}{s^3}+\frac{m(z'-z)}{u^3}=0$$

Queste nove equazioni rappresentano il moto de' tre corpi.

324. *Coroll. I.* Dalle tre equazioni ($b$) si sottraggano le equazioni ($a$) una per una; e ne usciranno queste

$$\frac{ddx}{dt^2}+(M+m)\frac{x}{r^3}+m'\left(\frac{x'}{s^3}-\frac{x'}{u^3}+\frac{x}{u^3}\right)=0$$

$$(f)\ \frac{ddy}{dt^2}+(M+m)\frac{y}{r^3}+m'\left(\frac{y'}{s^3}-\frac{y'}{u^3}+\frac{y}{u^3}\right)=0$$

$$\frac{ddz}{dt^2}+(M+m)\frac{z}{r^3}+m'\left(\frac{z'}{s^3}-\frac{z'}{u^3}+\frac{z}{u^3}\right)=0$$

E similmente combinando le equazioni (c) colle (d) ne avremo

$$\frac{ddx'}{dt^2}+(M+m')\frac{x'}{s^3}+m\left(\frac{x}{r^3}-\frac{x}{u^3}+\frac{x'}{u^3}\right)=0$$

$$(g)\ \frac{ddy'}{dt^2}+(M+m')\frac{y'}{s^3}+m\left(\frac{y}{r^3}-\frac{y}{u^3}+\frac{y'}{u^3}\right)=0$$

$$\frac{ddz'}{dt^2}+(M+m')\frac{z'}{s^3}+m\left(\frac{z}{r^3}-\frac{z}{u^3}+\frac{z'}{u^3}\right)=0$$

Queste sei equazioni così ridotte alle sole variabili $x$, $y$, $z$, $x'$, $y'$, $z'$ le quali disegnano le coordinate de' corpi $m$ ed $m'$ riferite al punto $M$, determinano il moto relativo de' suddetti due corpi attorno il corpo $M$, considerato come immobile. Ma il risolvere queste equazioni è ben altra opera da quel che fosse il risolvere le analoghe equazioni (T) che appartengono al caso di due soli corpi. Nell' applicazione che se ne fa al Sistema Planetario intervengono particolari circostanze, che danno luogo a sciogliere il Problema per approssimazione.

325. *Coroll. III.* Che se potessimo dalla risoluzione delle equazioni (*f*) (*g*) ottenere a ciascun istante di tempo i valori delle $x$, $y$, $z$, $x'$, $y'$, $z'$ e così conoscere il moto relativo de' due corpi $m$, $m'$ attorno di $M$, conosceremmo poi facilmente anche il moto assoluto di tutti i tre i corpi nello spazio, procedendo come (320) nel Problema precedente.

Poichè si moltiplichino le equazioni (*a*) per $M + m + m'$, le equazioni (*f*) per $m$, le equazioni (*g*) per $m'$; e così moltiplicate, si sommino ciascuna con ciascuna; e ne verrà

$$(M + m + m')\frac{ddX}{dt^2} + \frac{mddx}{dt^2} + \frac{m'ddx'}{dt^2} = 0$$

$$(M + m + m')\frac{ddY}{dt^2} + \frac{mddy}{dt^2} + \frac{m'ddy'}{dt^2} = 0$$

$$(M + m + m')\frac{ddZ}{dt^2} + \frac{mddz}{dt^2} + \frac{m'ddz'}{dt^2} = 0$$

ed integrando

$$(M + m + m')\,X + m\,x + m'\,x' = a + b\,t$$
$$(M + m + m')\,Y + m\,y + m'\,y' = a' + b'\,t$$
$$(M + m + m')\,Z + m\,z + m'\,z' = a'' + b''\,t$$

onde avremo per ciascuno istante il luogo de' tre corpi.

326. *Proposizione VIII.* Determinare il moto d'un sistema di corpi quanti si vogliono, traentisi l'un l'altro in ragion delle

masse, ed inversa de' quadrati delle distanze.

Sebbene il progresso indicato nel precedente Problema per tre corpi possa agevolmente estendersi a quanti corpi si vogliono, pure non sarà inutile rimetter sott' occhio nella forma più semplice le equazioni differenziali del Problema per qualunque numero di masse attraentisi.

Siano dunque $m$, $m'$, $m''$ ec. queste masse, ed $x, y, z$; $x', y', z'$ ec. le loro coordinate. E sia $r$ la distanza fra le masse $m$ ed $m'$; $s$ la distanza fra $m$ ed $m''$; $u$ la distanza fra $m'$ ed $m''$ ec. Onde sarà

$$r^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2$$
$$s^2 = (x''-x)^2 + (y''-y)^2 + (z''-z)^2$$
$$u^2 = (x''-x')^2 + (y''-y')^2 + (z''-z')^2$$

Consideriamo da prima la massa $m$ tirata dalle altre masse $m'$, $m''$ ec. colle forze $\frac{m'}{r^2}$, $\frac{m''}{s^2}$ ec. Ciascheduna di queste forze si risolva in tre, giusta le tre coordinate. L' attrazione $\frac{m'}{r^2}$ produrrà secondo le $x$ una

$$\text{forza} = \frac{m'}{r^2} \cdot \frac{x'-x}{r} = -\frac{m'}{r^2}\left(\frac{dr}{dx}\right) = \frac{1}{m}\left(\frac{d.\frac{mm'}{r}}{dx}\right).$$

Similmente la seconda attrazione $\frac{m''}{s^2}$ pro-

durrà secondo le $x$ una forza $\frac{1}{m}\left(\frac{d.\frac{m m''}{s}}{d x}\right)$; e così le altre. Quindi se porrò

$$Q = \frac{m m'}{r} + \frac{m m''}{s} + \frac{m' m''}{u} + \text{ec.}$$

vedesi che il complesso delle attrazioni de' corpi $m'$, $m''$ ec. esercita sulla massa $m$ una forza $= \frac{1}{m}\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ giusta la direzione delle $x$. Allo stesso modo le forze traenti la massa $m$ giusta le $y$ e le $z$ si troveranno $\frac{1}{m}\left(\frac{dQ}{dy}\right)$, $\frac{1}{m}\left(\frac{dQ}{dz}\right)$. Quindi avremo pel moto del corpo $m$ queste tre equazioni

$$\frac{m ddx}{dt^2} = \left(\frac{dQ}{dx}\right);\ \frac{m ddy}{dt^2} = \left(\frac{dQ}{dy}\right);\ \frac{m ddz}{dt^2} = \left(\frac{dQ}{dz}\right)$$

Pel corpo $m'$ si troveranno nella stessa guisa le equazioni

$$\frac{m' ddx'}{dt^2} = \left(\frac{dQ}{dx'}\right);\ \frac{m' ddy'}{dt^2} = \left(\frac{dQ}{dy'}\right);\ \frac{m' ddz'}{dt^2} = \left(\frac{dQ}{dz'}\right).$$

e così per tutti gli altri.

327. *Coroll. I.* Esaminando il valore di $Q$ funzione delle distanze $r$, $s$, $u$ ec. ed i valori di $r$, $s$, $u$ ec. funzioni delle coordinate $x$, $y$, $z$, $x'$ ec. si verificherà facilmente

essere

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right)+\left(\frac{dQ}{dx'}\right)+\left(\frac{dQ}{dx''}\right)+\text{ec.}=0\text{, o sia}$$

$S.\left(\frac{dQ}{dx}\right)=0$. E così pure $S.\left(\frac{dQ}{dy}\right)=0$, e $S.\left(\frac{dQ}{dz}\right)=0$.

Ed ancora si troverà

$$S.y\left(\frac{dQ}{dx}\right)=S.x\left(\frac{dQ}{dy}\right);\ S.z\left(\frac{dQ}{dx}\right)=S.x\left(\frac{dQ}{dz}\right)$$

$$S.z\left(\frac{dQ}{dy}\right)=S.y\left(\frac{dQ}{dz}\right)$$

328. *Coroll. II.* Posto ciò, ritorniamo alle equazioni differenziali del Problema (320) e facciamo la somma di tutte quelle che contengono i differenziali delle $x$, $x'$, $x''$ ec. e così pure di quelle in $y$, $y'$, $y''$ ec. e di quelle in $z$, $z'$, $z''$ ec. Ed avremo

$$S.\frac{mddx}{dt^2}=0;\ S.\frac{mddy}{dt^2}=0;\ S.\frac{mddz}{dt^2}=0$$

onde integrando

$$S.mx=A+Bt;\ S.my=A'+B't$$
$$S.mz=A''+B''t.$$

Ora se chiamerò $X$, $Y$, $Z$ le coordinate del centro di gravità del sistema, avrò

$$X=\frac{S.mx}{S.m};\ Y=\frac{S.my}{S.m};\ Z=\frac{S.mz}{S.m}$$

Sarà dunque

$$X = a + bt\,;\quad Y = a' + b't\,;\quad Z = a'' + b''t$$

Onde appare che il centro di gravità del sistema si moverà equabilmente in linea retta, nè avranno parte alcuna nel suo moto le attrazioni scambievoli del sistema.

329. *Coroll. III.* Le equazioni differenziali (326) in $x$, $x'$ ec. si moltiplichino per $y$, $y'$ ec. rispettivamente; e le equazioni differenziali in $y$, $y'$ ec. si moltiplichino per $-x$, $-x'$ ec. Così moltiplicate si sommino; e la somma darà $\text{S}.m\dfrac{yddx - xddy}{dt^2} = 0$. Ed integrando

$$\text{S}.m\frac{ydx - xdy}{dt} = C.$$

E similmente combinando le equazioni in $x$ con quelle in $z$, e le equazioni in $y$ con quelle in $z$, troveremo

$$\text{S}.m\frac{zdx - xdz}{dt} = C'\,;\quad \text{S}.m\frac{zdy - ydz}{dt} = C''$$

330. *Coroll. IV.* Finalmente moltiplichiamo le equazioni differenziali (326) in $x$, $x'$ ec. per $dx$, $dx'$ ec. e quelle in $y$, $y'$ ec. per $dy$, $dy'$ ec. e quelle in $z$, $z'$ ec. per $dz$, $dz'$ ec. E sommandole avremo

$$\text{S}.m\frac{dxddx + dyddz + dzddz}{dt^2} = dQ$$

onde integrando

$$S.m \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \text{Cost.} + 2Q$$

331. *Scolio*. Le sette equazioni integrali raccolte nei tre articoli precedenti sono quelle sole che sino ad ora si è potuto ricavare dalle equazioni differenziali (326). È manifesto che le prime tre (328) contengono ed esprimono il principio della conservazione del moto del centro di gravità; le seguenti (329) il principio della conservazione delle aree; e l' ultima (330) quello della conservazione delle forze vive. Quando il sistema è composto di due corpi soltanto, si arriva, come abbiam già veduto, a determinar compiutamente il moto d' entrambi. Ma tosto che i corpi sono tre, o più, non si può andare più innanzi senza il soccorso delle approssimazioni.

## SEZIONE SESTA

### Del Pendolo Idrometrico Composto.

332. Negli Elementi d' Idraulica (II. 429) abbiamo promesso d' aggiungere alcune avvertenze riguardanti l' uso del Pendolo Idrometrico, e di spiegare distesamente il calcolo da farsi onde rilevare per via di questo strumento la scala delle velocità e la portata in una proposta perpendicolare. A tal fine è d' uopo rimettersi sott' occhio l' equazione $(E)$ che rappresenta (II. 425. 426) l' equilibrio dell' asta sommersa nella corrente pel tratto $a - m$, diviso in eguali intervalli $2n$, percossi dall' acqua con velocità dovuta alle altezze $s$, $s'$, $s''$ ec. e declinante dal perpendicolo coll' angolo $\varphi$.

333. Faremo per brevità

$$\frac{\pi r (2abq - a^2 + m^2)}{2,2} \cdot \frac{\sin. \varphi}{\cos. \varphi^2} = M$$

e l' equazione $(E)$ moltiplicata per $2n$ prenderà questa forma $(E')$

$$M = 2n(m+n)s + 2n(m+3n)s' + 2n(m+5n)s'' \text{ ec.}$$

334. Sono tre le forze che sollecitano il pendolo. L' una è il peso dell' asta, l' altra è la spinta verticale dell' acqua contro la

porzione dell' asta sommersa, la terza è l'urto della corrente contro questa stessa porzion sommersa. Richiedesi per l' equilibrio che la somma de' momenti di queste tre forze risulti eguale a zero, prendendo ciascun momento col segno che gli appartiene. Ed appunto è facile il riconoscere, come il primo membro dell' equazione ($E'$) inchiude i momenti delle due prime forze, ed il secondo membro rappresenta il momento dell' ultima.

Questo secondo membro è composto di tanti termini quanti sono gl' intervalli dell' asta che si suppongono investiti dalla corrente con diverse velocità. E perchè il momento della percossa dell' acqua varia da un intervallo all' altro secondo tre elementi, che sono la lunghezza del tratto percosso, la distanza del centro dell' impulso dal centro del moto, e l' altezza dovuta alla velocità della corrente, perciò appunto ogni termine del secondo membro è il prodotto di tre fattori, che rappresentano, come è manifesto, questi tre diversi elementi.

Osservate queste cose sulla composizione dell' equazione ($E'$) rimarrà facilissimo l' applicarla al caso che gl' intervalli dell' asta percossi dalla corrente con diverse velocità non fossero eguali in lunghezza.

335. Ciò premesso, ecco la via da tenersi per cercare col pendolo le velocità d' una

proposta perpendicolare. Collocato il centro di sospensione in modo che verticalmente sovrasti ad essa perpendicolare, vadasi di mano in mano abbassando in guisa che da prima si tuffi sott' acqua l'ultima divisione dell' asta, indi la seguente, poi la terza, e così successivamente ad ogni ripresa un nuovo intervallo si nasconda sotto il pelo della corrente. Si noti ad ogni volta il corrispondente angolo $\varphi$. Dalla serie di questi angoli conosceremo il progresso delle velocità mediante il calcolo seguente.

336. Siano le situazioni dell' asta ne' consecutivi abbassamenti (Fig. 20) $AG$, $AG$, $AG$ ec. così che da prima si trovi sott' acqua il tratto estremo $Gh$, poscia il tratto doppio $Gk$, indi il triplo $Gi$, e così di mano in mano. Gli angoli di declinazione $A$, $A$, $A$ ec. dal più alto venendo al più basso si distinguano colle lettere $\varphi$, $\varphi'$, $\varphi''$ ec. e le lunghezze dell' asta sporgenti fuor d' acqua $Ah$, $Ak$, $Ai$ ec. colle lettere $m$, $m'$, $m''$ ec. Pei termini $G$, $G$, $G$ si conducano le orizzontali $GM$, $GN$, $GO$ le quali nelle porzioni sommerse dell' asta seghino gl' intervalli $hG$; $k\beta$, $\beta G$; $i\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta G$. Ognuno di questi intervalli s' intenda diviso per mezzo ne' punti $Q$, $R$, $S$ ec. Mentre poi l' asta nel suo discendere viene successivamente investita dalle colonne d'ac-

qua sempre più basse $BM$, $MN$, $NO$ ec. le velocità di queste colonne siano rispettivamente dovute alle altezze $s$, $s'$, $s''$ ec.

337. L' equilibrio dell' asta nelle successive posizioni $AG$, $AG$, $AG$ ec. ne somministrerà altrettante equazioni analoghe all' equazione $(E')$ dell' art. 333. Si denoti colle lettere $M'$, $M''$ ec. quel che diventa la formola $M$ ponendo in luogo di $\Phi$ e di $m$ le lettere $\Phi'$, $\Phi''$ ec. $m'$, $m''$ ec. È manifesto (334) che le equazioni sopradette saranno

$$M = hG \cdot AQ \cdot s$$
$$M' = k\beta \cdot AR \cdot s + \beta G \cdot AS \cdot s'$$
$$M'' = i\gamma \cdot AT \cdot s + \gamma\delta \cdot AV \cdot s' + \delta G \cdot AX \cdot s''$$

. . . . . . . . . . . . . . . .

Resta solo che troviamo le espressioni analitiche delle linee $hG$, $AQ$, $k\beta$ ec.

338. Ora abbiamo $BM = 2n \cos.\Phi$, $BN = 4n \cos.\Phi'$, $BO = 6n \cos.\Phi''$; onde $MN = 4n \cos.\Phi' - 2n \cos.\Phi$, $NO = 6n \cos.\Phi'' - 4n \cos.\Phi'$. Quindi

$$hG = 2n$$
$$k\beta = \frac{2n \cos.\Phi}{\cos.\Phi'}\,;\quad \beta G = \frac{4n \cos.\Phi' - 2n \cos.\Phi}{\cos.\Phi'}$$
$$i\gamma = \frac{2n \cos.\Phi}{\cos.\Phi''}\,;\quad \gamma\delta = \frac{4n \cos.\Phi' - 2n \cos.\Phi}{\cos.\Phi''}$$
$$\delta G = \frac{6n \cos.\Phi'' - 4n \cos.\Phi'}{\cos.\Phi''}$$

. . . . . . . . . . . . . . . .

E finalmente

$AQ = m + n$

$AR = m' + \frac{n\cos.\phi}{\cos.\phi'}$ ; $AS = m' + \frac{2n\cos.\phi' + n\cos.\phi}{\cos.\phi'}$

$AT = m'' + \frac{n\cos.\phi}{\cos.\phi''}$ ; $AV = m'' + \frac{2n\cos.\phi' + n\cos\phi}{\cos.\phi''}$

$AX = m'' + \frac{3n\cos.\phi'' + 2n\cos.\phi'}{\cos.\phi''}$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

339. Per abbreviare si faccia

$2n\cos.\phi = A$ ; $n\cos.\phi = B$

$4n\cos.\phi' - 2n\cos.\phi = A'$ ; $2n\cos.\phi' + n\cos.\phi = B'$

$6n\cos.\phi'' - 4n\cos.\phi' = A''$ ; $3n\cos.\phi'' + 2n\cos.\phi' = B''$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Le denominazioni del precedente articolo si scriveránno più brevemente così

$hG = \frac{A}{\cos.\phi}$

$k\beta = \frac{A}{\cos.\phi'}$ ; $\beta G = \frac{A'}{\cos.\phi'}$

$i\gamma = \frac{A}{\cos.\phi''}$ ; $\gamma\delta = \frac{A'}{\cos.\phi''}$ ; $\delta G = \frac{A''}{\cos.\phi''}$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$A Q = m + \frac{B}{\cos.\,\Phi}$$

$$A R = m' + \frac{B}{\cos.\,\Phi'}\,;\; A S = m' + \frac{B'}{\cos.\,\Phi'}$$

$$A T = m'' + \frac{B}{\cos.\,\Phi''}\,;\; A V = m'' + \frac{B'}{\cos.\,\Phi''}$$

$$A X = m'' + \frac{B''}{\cos.\,\Phi''}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

340. Sostituiti questi valori, le equazioni dell' art. 337 riescono

$$M = \frac{A}{\cos.\,\Phi}\left(m + \frac{B}{\cos.\,\Phi}\right)s$$

$$M' = \frac{A}{\cos.\,\Phi'}\left(m' + \frac{B}{\cos.\,\Phi'}\right)s + \frac{A'}{\cos.\,\Phi'}\left(m' + \frac{B'}{\cos.\,\Phi'}\right)s'$$

$$M'' = \frac{A}{\cos.\Phi''}\left(m'' + \frac{B}{\cos.\Phi''}\right)s + \frac{A'}{\cos.\Phi''}\left(m'' + \frac{B'}{\cos.\Phi''}\right)s'$$
$$+ \frac{A''}{\cos.\Phi''}\left(m'' + \frac{B''}{\cos.\Phi''}\right)s''$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

341. Tante sono queste equazioni, quante le incognite $s$, $s'$, $s''$ ec. Determinate queste, conosceremo le velocità della corrente negli strati $BM$, $MN$, $NO$ ec. le quali saranno $\sqrt{2gs}$, $\sqrt{2gs'}$, $\sqrt{2gs''}$ ec. E la portata della perpendicolare $BMNO$ . . . .

o sia la quantità dell' acqua che in un minuto secondo vi passa, sarà espressa dalla serie

$$A\sqrt{2gs} + A'\sqrt{2gs'} + A''\sqrt{2gs''} + \text{ec.}$$

342. Dichiarata sin qui la teoria del pendolo idrometrico, soggiungerò alcune avvertenze concernenti il calcolo delle equazioni precedenti, ed il maneggio dello strumento. Quando si adopera il pendolo al solo fine di misurare la portata, si potrà arrivare sin presso al fondo della perpendicolare da misurarsi, con tre o quattro immersioni dell'asta tutt'al più, sommergendo ad ogni volta intervalli piuttosto larghi, purchè comprendano egual numero di divisioni. Così le equazioni da calcolare si ponno ridurre a tre, o quattro. Ridotte a sì poco numero, il loro calcolo non è nè molto lungo, nè difficile, attesa massime la speditezza colla quale si formano i loro termini dalla serie degli angoli osservati $\phi$, $\phi'$ ec.

343. Ma perchè la portata che da questo calcolo si ritrae, non è che un approssimazione, ed un approssimazione tanto più larga quanto meno immersioni si fanno, gioverà prevedere se la portata che si calcola sia per riuscire troppo scarsa, o troppo abbondante. Io dico adunque, che se troveremo che le velocità calino andando dal pelo d'acqua verso il fondo, la portata che si calco-

la riuscirà alquanto minore del giusto; e per lo contrario, se crescono, riuscirà alquanto eccedente.

Infatti la formola della portata (341) suppone che $\sqrt{2gs}$, $\sqrt{2gs'}$ ec. siano le velocità medie della corrente ne' tratti $BM$, $MN$ ec. Ma $\sqrt{2gs}$ non è veramente la velocità media del tratto $BM$. Essa è quella velocità che se fosse uniforme per tutto il suddetto intervallo $BM$, produrrebbe la stessa declinazione $\phi$ del pendolo.

Ora si supponga che le velocità decrescano da $B$ verso $M$. Gli urti dell'acqua contro l'asta decresceranno da $B$ in $M$ in maggior proporzione che non fanno le velocità, vale a dire in proporzione de' loro quadrati; onde per avere una velocità uniforme che produca la stessa declinazione del pendolo, converrà prendere una velocità minore che non è la velocità media. Sarà dunque $\sqrt{2gs}$ minore della velocità media del tratto $BM$, e così le altre; onde ec.

Per lo contrario, crescendo le velocità da $B$ verso $M$, crescono anche le impressioni dell'acqua sui punti corrispondenti dell'asta, ma crescono con maggior proporzione; onde ridotto l'effetto loro ad un solo impulso procedente da una velocità uniforme, questa velocità uniforme riuscirà maggiore della velocità media. Dunque ec.

Queste aberrazioni saranno tanto più leggere, quanto meno varieranno le velocità entro gl'intervalli $BM$, $MN$ ec. e siccome per ordinario la degradazione delle velocità è assai lenta, così l'errore non potrà essere che picciolissimo.

344. Quando poi si adoperi il pendolo idrometrico all'oggetto di riconoscere la legge o scala con cui degradano le velocità della corrente, allora converrà fare le immersioni più spesse, sommergendo ad ogni volta brevi intervalli dell'asta, e si avranno molte equazioni a calcolare. Il qual calcolo riuscirebbe veramente un po' lungo se non fosse in pronto un modo di agevolarlo. Riflettasi che in questo caso gli angoli $\varphi$, $\varphi'$, $\varphi''$ ec. per ordinario cresceranno assai lentamente, cosicchè la differenza tra due angoli consecutivi sarà ben piccola. Onde si vede che i punti $\beta$; $\gamma$, $\delta$ ec. taglieranno a un di presso in parti eguali le lunghezze $kG$, $iG$ ec. e coincideranno assai prossimamente colle divisioni eguali dell'asta. E le equazioni dell'art. 340 diventeranno

$$M = 2n(m+n)s$$
$$M' = 2n(m'+n)s + 2n(m'+3n)s'$$
$$M'' = 2n(m''+n)s + 2n(m''+3n)s' + 2n(m''+5n)s''$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ovvero

$M = 2n(a-n)s$

$M' = 2n(a-3n)s + 2n(a-n)s'$

$M'' = 2n(a-5n)s + 2n(a-3n)s' + 2n(a-n)s''$

. . . . . . . . . . . . . . . . . .

le quali si formano e si calcolano assai speditamente.

345. Ciò per riguardo al calcolo. Or venendo all'istrumento medesimo, il punto più essenziale consiste nel regolare il peso specifico dell'asta in modo che gli angoli di declinazione vengano i più grandi e visibili che si possa, con questo però che mai non eccedano il limite di 30 gradi, eziandio nelle immersioni più profonde. Questo si disse altrove (II. 427) potersi ottenere col servirsi per asta d'una canna vota di latta, il di cui peso si accrescerebbe a piacere, empiendo il vano della canna con migliarole di piombo.

346. Esplorata la velocità superficiale della corrente nel sito ove si vuol adoperare il pendolo, può trovarsi con breve calcolo quanto peso di pallina debba gettarsi nel vano della canna per ottenere la gravità specifica conveniente all'esperimento. Chi amasse di veder questo calcolo nelle Memorie della Società Italiana Tom. XIV. pag. 165 avverta esservi corso un errore nella formola che determina il peso $P$ della pallina da introdursi nel cavo. Il valore di $P$ va molti-

plicato pel fattore $\pi p^2 (1 + \lambda)$ ommesso per inavvertenza.

347. Ma senz'altro calcolo, il più pronto partito è quello di caricare la canna sul luogo stesso, e nel principio dell'esperienza, collocando prima il centro di sospensione in quella maggiore bassezza, a cui vogliamo portarlo, e poscia infondendo per di sopra nella canna altra ed altra pallina di piombo, sin tanto che l'angolo della declinazione si riduca al termine dei 30 gradi, o poco meno. Il che si giudica facilmente anche ad occhio, non essendo questo un limite così preciso che abbisogni determinarlo accuratamente. Così saremo certi d'avere caricato il pendolo a dovere. E senza più sollevando a poco a poco il centro di sospensione faremo successivamente emergere dall'acqua le divisioni equidistanti della canna, e notando ad ogni volta le declinazioni del pendolo, avremo raccolto gli opportuni dati pel calcolo.

348. Il sostegno del pendolo può essere una robusta colonnetta di legno divisa in parti eguali, ed armata di forte punta di ferro, mediante la quale potrà piantarsi nel fondo dell'alveo, e tenersi ritta verticalmente. Sia la colonnetta abbracciata da una staffa quadra che possa scorrere su e giù per essa, e fermarsi a vite a qual altezza

si vuole. Sporga dalla staffa una spranga orizzontale, lunga quanto più si può, ed inserita in guisa da poter trascorrere orizzontalmente e prolungarsi or dall' una or dall' altra parte della colonnetta. Da un capo di questa spranga penda la canna del pendolo unitavi a cerniera in modo che abbia libertà di girare a seconda della corrente. E l' altro braccio della spranga porti un equipondio mobile destinato ad equilibrare il peso della canna, affinchè la colonnetta non patisca alcuno sforzo tendente a rimoverla dal sito verticale.

349. Con questa semplicissima foggia di armatura abbiamo il vantaggio di potere con una sola stazione della colonnetta esplorare più d' una perpendicolare della stessa sezione, portando più e più in fuori per mezzo della spranga mobile, l' asta del pendolo. Ne' piccioli canali spesse volte verrà fatto di compiere la misura dell' intera sezione con una stazion sola, o al più con due che si facciano l' una rimpetto all' altra in vicinanza delle due rive opposte. Nè vi sarà bisogno nè di gettare un ponte, nè d' accostare allo strumento una barca. E quando poi sia necessario ricorrere a questi ripieghi, sarà sempre un vantaggio il potersi estendere alle perpendicolari alquanto discoste dal ponte o dalla barca, ed esenti

dalle alterazioni che la vicinanza di questi ostacoli potrebbe indurre.

350. Mentre poi sia coll' abbassare, sia col rialzare la staffa, le divisioni del pendolo si fanno venire una per volta a toccare il pelo dell' acqua, noi mediante le divisioni della colonnetta conosceremo ad ogni volta l' altezza del centro di sospensione sopra il pelo della corrente. E conosciuta questa, si ottien subito senza bisogno nè di quadrante, nè d' altro, il valore dell' angolo di declinazione, conforme altra volta si disse (II. 429).

351. Prima di por termine a questa Sezione, soggiungerò un avvertenza che riguarda un altro Strumento idrometrico, vale a dire il Tubo di Pitot. Nel dichiarare l' uso di questo Strumento si disse (II. 418) doversi misurare l' altezza dovuta alla velocità dall' alzamento dell' acqua nel tubo sopra il pelo della corrente. Or questa regola non è abbastanza sicura; poichè suppone che la pression posteriore sia eguale a quella che vi farebbe l' acqua stagnante, il che non è vero a tutto rigore, essendo anzi tal pressione posteriore (II. 366) sempre alquanto più piccola che non sarebbe se l' acqua ristagnasse. Quindi la velocità misurata coll' anzidetta regola potrà riuscire troppo scarsa. Staremo sul sicuro, tenendoci al metodo

suggerito nel seguente art. 419, il qual è di voltar prima il tubo colla bocca a seconda della corrente, e poi rivolgerlo alla parte opposta. L'alzamento della colonna d'acqua nel tubo da una volta all'altra, sarà l'altezza dovuta alla velocità. Oltre che quest' alzamento si osserva molto più facilmente, che non potrebbe farsi l'altezza della colonna nel tubo sopra il pelo della corrente, esso poi ne dà l'immediata misura dell'eccesso della pressione anteriore sopra la posteriore, e perciò (II. 350) dell'altezza dovuta alla velocità.

## SEZIONE SETTIMA

### Di alcune Macchine Idrauliche.

### CAP. I.

### *Dell' Ariete Idraulico.*

352. Fra le Macchine elevatrici dell'acqua tiene distinto luogo per la singolarità del suo gioco l'Ariete idraulico, recente invenzione del Sig. Montgolfier. Gli effetti di questa macchina non sono stati sino ad ora ridotti a precisa misura. Il Sig. Cav. Brunacci colla scorta del calcolo, e col confronto di diligenti sperienze si applica di presente a darne una completa Teoria, frutto della quale sarà il predir giustamente l'effetto d'un dato Ariete, l'assegnarne le più vantaggiose dimensioni, il perfezionarne la fabbrica, e il paragonarne il prodotto a quello delle altre Macchine già conosciute. Noi frattanto non lascieremo desiderare agli Studiosi la descizione della macchina, ed una qualche spiegazione de' curiosi fenomeni che essa ci mostra.

353. *A L* (Fig. 21) è una camera cilindri-

ca cui sovrincombe la campana *LQL*. Nel fondo della camera havvi un buco tondo *RR* munito della valvola *E* che s'apre di sotto in su per la pressione d'una molla. Nel coperchio due valvolette *H*, *H* aprono la comunicazione tra la camera e la campana. Questa poi è attraversata dal tubo *QY*, forato in *Y*, ed aperto per di sopra in *Q*, ove congiungesi con un lungo tubo ascendente *QD*. La camera riceve per fianco l'acqua da un condotto *LBA* alimentato dal recipiente inesausto *MBM*.

354. Il modo di mettere in azione la macchina è come segue. Da principio si tiene chiusa la valvola *E*; ed allora l'acqua del tubo di condotta, riempiuto il vano della camera, aprendo le valvolette, penetra nella campana: ivi s'inalza sopra del foro *Y*, sin tanto che la sua pressione si equilibri con quella dell'aria che si comprime verso la sommità della campana; poi passando sempre per *Y* si solleva nel tubo *QD* sino in *M* al livello del recipiente. Allora si schiude a fòrza la valvola *E*, e la macchina si abbandona a se stessa.

355. Non sì tosto è aperta la valvola, che l'acqua si rivolge all'ingiù, versandosi largamente per lo sfondo *RR*; e in questo frattempo le valvolette *H*, *H* si serrano, e l'acqua nel tubo ascendente resta ferma in

*M*. Ma ben presto la valvola *E* si richiude da se stessa per la sola forza della corrente; a misura che ella ricade, le valvolette superiori si riaprono; e nel momento che la valvola si serra del tutto, battendo con forte colpo il piano sottoposto, l'acqua nel tubo *Q D* si solleva tutto in un tratto ad un altezza molto maggiore di *M*.

Dopo brevissimo intervallo, la valvola *E* torna ad aprirsi da se per la pressione della molla; onde l'acqua di nuovo si rovescia per *R R*, le valvolette si chiudono, e l'acqua nel tubo montante si arresta. Siccome poco dopo richiudendosi la valvola *E*, quelle si riaprono, e l'acqua torna a montare nel tubo *Q D*.

356. Così ad ogni colpo dell'ariete va l'acqua sempre più elevandosi nel tubo verticale. Se la lunghezza di questo tubo è indefinita, ben tosto si arriva ad un limite d'altezza, come *K*, che più non si sorpassa, mentre per quanto prosegua a giocare la macchina, le valvolette *H*, *H* non si riaprono più. Ma se un poco al di sotto di questo limite apresi lo sfogo *D*, tendendo l'acqua continuamente a rialzarsi sopra il punto *D* per giungere in *K*, continuamente per lo sfogo stesso si versa.

In tal guisa una porzione dell'acqua fornita dal recipiente viene per l'Ariete solle-

vata ad un altezza molte volte maggiore di quella del recipiente stesso. E dico una porzione; giacchè la massima parte dell' acqua versandosi per lo sfondo *R R* si dissipa in pura perdita.

357. Se si rimove il tubo montante *Q D*, l acqua zampilla dal lume *Q* a modo di getto. Da prima questo getto per poco non arriva al livello *M*; nell' aprirsi della valvola *E* si abbassa, ma nel serrarsi della medesima sale tutto in un tratto molto al di sopra di *M*. Riaprendosi la valvola, torna a calare, ma nel seguente colpo risale ad un altezza anche maggiore di prima. Di nuovo s' abbassa, poi rimonta, sin tanto che dopo pochi colpi perviene all' altezza massima *K*; ed allora nell' aprirsi della valvola si abbassa sempre, e nel suo serrarsi sempre si rinfranca alla medesima altezza.

358. Facciamoci ora ad investigare le forze che sollevano la colonna dell' acqua nell' Ariete. Non è punto difficile intendere come essa monti all' altezza *M*, quando è chiusa la valvola *E*. Da principio l' acqua che penetra per *H*, *H* si alza sopra il buco *Y* sino in *F* tanto che la pressione dell' aria condensata alla cima della campana eguagli la pressione dell' acqua in *F*. Allora quella che di nuovo sopravviene passa per *Y* nel tubo

spinta dalla pressione $MF$; e però dee giungere sino in $M$ ed ivi arrestarsi.

Ora si forzi la valvola $E$, e si apra. Tutta l'acqua del condotto volgendosi verso $RR$, le valvolette $H$, $H$ si chiudono, e restan chiuse per quanto dura lo sfogo per $RR$. In questo tempo l'acqua del tubo non si moverà punto.

359. Ma questo stato di cose ha durata brevissima; poichè ben tosto la violenza del corso che volta per $RR$ richiude frettolosamente la valvola $E$, ed intercetta di subito tutta la corrente. Egli è allora che le valvolette superiori si riaprono, e molt' acqua s'intrude nella campana, la quale comprimendo gagliardamente l'aria rinchiusavi, sollèva in proporzione la colonna nel tubo ascendente $QD$.

360. Questo è il più singolare fenomeno dell'Ariete. Ecco la spiegazione indicatane da' Chiarissimi Professori Pini, e Racagni (*a*). Tutta l'acqua che pel tubo di condotta accorreva alla camera, fermata dal repentino ostacolo della valvola, perde subitamente tutto il suo moto e tutta la sua forza. Quindi essa agirà per ogni verso contro le pareti che la racchiudono, con una pressione eguale alla forza perduta. Ed infatti, se

(a) *Società Italiana Tom. X. Part. II.*

intendiamo rimosse queste pareti, ed in vece loro sostituita una forza eguale e contraria alla pressione che l'acqua vi eserciterà, l'acqua dovrà fermarsi nè più nè meno; dunque questa reazion delle pareti dev' esser tanta, quanta richiedesi ad estinguere tutto ad un tratto il moto della corrente. Dunque la pression dell' acqua contro ogni punto delle pareti è eguale alla forza perduta dalla massa dell'acqua improvvisamente fermata. Questa subitanea pressione è quella che caccia l' acqua con impeto entro la campana, onde poi consegue la compressione dell' aria, e il sollevamento della colonna ascendente.

361. Non è però da credere che l' altezza a cui si porterà la colonna per questo primo colpo dell' Ariete sia tanta quanta corrisponde alla pressione che abbiam detto. Poichè tal pressione dura brevissimo tempo, nè può spingere entro la campana se non tant' acqua quanta in quel brevissimo tempo può passare pei fori delle valvolette colla velocità dovuta all' eccesso di essa pressione sopra la pressione dell' aria racchiusa nella campana. Quanto sarà il volume di quest' acqua, altrettanta sarà la condensazione che ne seguirà nell' aria della campana, ed a questa risponderà colla debita proporzione l' innalzamento della colonna.

362. Spenta la velocità della corrente, cessa subito quella pression momentanea, le valvolette *H*, *H* ricadono, e la colonna ascendente si ferma. Nella camera poi e nel tubo di condotta succede che riaprendosi la valvola *E* per la forza della molla, l'acqua ripiglia corso verso *R R*, e ben tosto accelerandosi torna a spinger la valvola e a riserrarla. Quindi un nuovo colpo dell'Ariete, accompagnato dalla stessa pressione di prima. E perchè il colpo precedente non aveva per anche ridotto (361) l'aria della campana a quel grado di condensamento e di elasticità che fosse eguale a questa pressione, quest'aria non impedirà che le valvolette si rialzino, e che nuova acqua s'intruda nella campana; sebbene con velocità minore di prima, per essere ora minore la differenza fra la pressione sudetta, e l'elasticità dell'aria imprigionata. Questa nuova acqua comprimerà vieppiù l'aria, e solleverà in proporzione la colonna.

363. Continuando così il gioco dell'Ariete, avverrà in breve che l'elasticità dell'aria ristretta nella campana arrivi ad eguagliare la pressione che nasce dall'improvviso arresto della corrente inferiore. Allora la colonna eminente avrà aggiunta l'altezza massima *K*, misura di questa pressione, nè più si riapriranno le valvolette. Ma se la

colonna non potrà arrivare all'altezza *K* mercè lo scarico inferiore *D*, allora nel breve intervallo che passa tra un colpo e l'altro dell'Ariete, l'aria della campana si dilaterà alcun poco spingendo tuttavia fuori l'acqua per *D*, ed il colpo seguente potrà riaprire le valvolette *H*, *H* per dar passaggio a tant'acqua quanto importa la colonna *DK*. E così sarà continuato il flusso dell'acqua per lo scaricatore.

364. Quando l'acqua non s'alza a modo di colonna, ma zampilla a guisa di getto, lo stesso discorso ci rende palese la ragione perchè il getto da prima arrivi sin presso al livello *M*, poi si faccia sempre più alto, finalmente sorga sino in *K*. E qui negl'intervalli ne' quali stanno chiuse le valvolette, l'aria interna sempre si dilata alcun poco, e l'altezza del getto si va abbassando per rinfrancarsi poscia nel successivo colpo dell'Ariete.

365. Dalla spiegazione testè adombrata si scorge che la ragion vera del maraviglioso effetto dell'Ariete è riposta in quella pressione che l'acqua esercita allorquando il suo corso viene subitaneamente intercetto, ed arrestato. Parmi che questa pressione debba misurarsi dal prodotto della massa dell'acqua corrente per la velocità colla quale essa correva, e che rimane di subito

spenta. Ed ecco la ragione per la quale in pari circostanze l' effetto dell' Ariete è maggiore quando è più lungo il tubo di condotta, e maggiore l' altezza del recipiente; perchè la lunghezza del tubo accresce la massa della corrente, e l' altezza del recipiente ne accresce la velocità. E per questo nuoce all' effetto dell' Ariete la troppa ristrettezza dell' apertura *R R*; perchè allora la velocità della corrente entro il tubo rimane troppo piccola. Nuoce ancora se la valvola *E* o pel soverchio suo peso, o per la fiacchezza della molla troppo presto si serri; perchè l' acqua del condotto non avrà tempo di concepire tutta quella velocità della quale sarebbe capace.

366. Del resto non è l' Ariete la sola macchina nella quale si scorgano gli effetti di quella pressione che improvvisa emerge dall' improvviso fermarsi del corso dell' acqua. Certamente non ad altra cagione devesi attribuire il salto iniziale de' getti d' acqua, fenomeno osservato dal de la Hire, da Daniello Bernulli, dall' Ab. Bossut. Accade assai volte che nell' aprirsi la chiave d' un getto, il primo spruzzo salga ad un altezza molto maggiore del recipiente, sebbene poi tosto si rimetta all' altezza regolare. Ora se avvertiremo bene, si troverà che questo fenomeno accade allor quando l' acqua per

una cagione qualsiasi deve scorrere un tratto per il tubo di condotta prima di arrivare alla piastra ov' è aperto il forellino del getto, dalla quale piastra trovandosi tutto in un colpo arrestata, esercita quella pressione che spinge il getto a straordinaria altezza.

367. Parmi per conseguenza che abbiano il torto quegli Scrittori d'Idraulica che attribuirono questo salto iniziale de' getti all' azione dell' aria, come a cagione immediata. L'aria non ha parte alcuna nel fenomeno, se non forse accidentale; come se per esempio l'aggruppamento dell' aria fosse desso la cagione che tien lontana la superficie dell' acqua dalla piastra, onde quella superficie sia obbligata a scorrere per qualche tratto prima di arrivarvi. E già lo stesso Bernulli (a) avea bene avvertito che il fenomeno avviene ancor quando l'aria non può in verun modo incolparsene.

368. Parmi ancora doversi correggere la tracia che tengono i suddetti Autori per calcolare l'altezza a cui salterà il getto. Cercano la velocità che avrà l'acqua del tubo giungendo alla piastra; accrescono poi quella velocità nella proporzione dell' area del foro all' area della sezione del tubo; e tale, dicono essi, sarà la velocità del salto. Ma

(a) *Hydrodyn.* pag. 60.

in primo luogo non si vede il perchè quella velocità debba subitamente accrescersi nell' indicata proporzione. In secondo luogo con questo calcolo non si tiene alcun conto della massa dell' acqua arrestata, che certamente quanto è maggiore, tanto più elevato si spiccherà il salto, come la ragione e l'esperienza concordemente ci mostrano.

## CAP. II.

### Della Coclea d' Archimede.

369. La Coclea d' Archimede è un cilindro attorno cui serpeggia un tubo spirale curvato in elice, ( I. 565 ) e terminato ne' punti corrispondenti delle basi opposte. Si pone l' asse del cilindro inclinato all' orizzonte, e si ferma in tal sito che la sua base peschi, ma non del tutto, nell' acqua. Poi si rivolge il cilindro sopra il suo asse con tal direzione che il buco inferiore del tubo imbocchi per di sopra la superficie dell' acqua. Proseguendo il giro equabilmente, l' acqua si va innalzando nel tubo spirale, e sormonta alla cima uscendo fuori pel buco superiore.

370. Non è difficile il formar concetto del modo con cui l' acqua s' innalza in questa

macchina. Immerso il foro del tubo, la spira nel voltarsi riceve una porzione dell'acqua che vi entra, ed ivi come per un piano inclinato discende, empiendo la più bassa parte della spira. Dicesi questa parte *Arco idroforo*. Seguitando la conversione del cilindro, l'arco idroforo emerge dal livello del recipiente seco traendo l'acqua rinchiusavi, la quale segue tuttavia discendendo pel proprio peso verso la parte opposta alla direzione del movimento del cilindro, e così va scostandosi dalla spira inferiore. Questa intanto seguendo il giro del cilindro torna ad immergersi col suo foro, e torna a riempiere l'arco idroforo, ed a sollevarne l'acqua. Quest'acqua non può più raggiungere la prima; che in questo frattempo si è avanzata per le spire dell'elice; rimane fra le due uno strato d'aria, introdottasi nel tempo che il foro del tubo rimase fuor d'acqua. Così perpetuandosi il giro, altre ed altre correnti d'acqua si vanno succedendo con l'interposizione d'altrettanti tratti aerei. E queste giungendo l'una dopo l'altra alla cima, si scaricano con getto intermittente dal foro superiore.

Di qui si vede che l'acqua nel tubo spirale continuamente discende pel proprio peso, e continuamente è sollevata pel moto contrario del cilindro; ed intanto sormonta,

in quanto che in ciascuna rivoluzione l' altezza della salita supera quella della discesa. Ma venghiamo a dichiarare più particolarmente le affezioni dipendenti dalla forma e dalle dimensioni della macchina.

371. *Proposizione I.* Trovare l' equazione dell' elice.

Sia $AQB$ (Fig. 22) la base del cilindro, il di cui raggio $= 1$. Da un punto qualunque $M$ dell' elice conducasi $MQ$ normale alla base, e da $Q$ si conduca $QP$ normale al di lei diametro $AB$. Sia fatto $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$, l' arco del circolo $AQ = s$, l' arco dell' elice $AM = l$. Prima per la natura del circolo avremo fra $x$ ed $y$ l' equazione $y^2 = 2x - x^2$. Poi per la genesi e la natura dell' elice (I. 565) se chiameremo $\xi$ l' inclinazione costante dell' elice al piano della base del cilindro, avremo $dz = ds$ tang. $\xi$, onde $z = s$ tang. $\xi$. Queste due equazioni rappresentano la doppia curvatura dell' elice.

372. *Corollario*. Avremo ancora per la natura dell' elice $l = s$ sec. $\xi$. Onde si vede che la rettificazione dell' elice dipende da quella del circolo, e che un arco qualunque della spira $AIH$ ha una ragion costante all' arco della periferia della base che gli sta sotto. Fatto $s = 2\pi$ avremo $L = 2\pi$ sec. $\xi$ lunghezza dell' intera spira $AIH$.

373. *Proposizione II.* Determinare l'altezza d'un punto qualunque $M$ dell'elice sopra l'orizzonte.

Sia condotto per $B$ il piano orizzontale $TV$, e sia l'angolo $ABT = E$, che misura l'elevazione della base della Coclea sopra l'orizzonte, o la declinazione del suo asse dalla verticale. Cercherò l'altezza del punto $M$ sopra il piano orizzontale $TV$.

Segnisi per $M$ il cerchio $CMD$ parallelo alla base, e si compia il rettangolo $MQPR$. Dai punti $P$, $R$ si calino le verticali $PT$, $RV$, e da $P$ si stenda l'orizzontale $PS$. Sarà l'angolo $PRS = ABT = E$. La $PT$ altezza del punto $P$ non meno che del punto $Q$ sopra l'orizzonte $TV$, sarà $= PB$ sin. $E =$ $(2 - x)$ sin. $E$; e la $RV$ altezza del punto $R$ non meno che del punto $M$ sopra lo stesso orizzonte $TV$, sarà $= RS + SV = RP$ cos. $E +$ $PB$ sin. $E = z$ cos. $E + (2 - x)$ sin. $E$. Il che si cercava.

374. *Coroll. I.* E perchè (371) $z = s$ tang. $\xi$, ed $AP$ è il seno verso dell'arco $AQ$, onde $x = 1 -$ cos. $s$, avremo anche per rappresentare l'altezza del punto $M$ sopra l'orizzonte, quest'altra espressione

$$s \text{ tang. } \xi \text{ cos. } E + (1 + \text{cos. } s) \text{ sin. } E.$$

375. *Coroll. II.* Differenziando questa formola, ed eguagliando a zero il differenziale, avrò

$$\sin. s = \frac{\text{tang. } \xi}{\text{tang. } E}$$

la qual equazione ci addita quei punti dove l' altezza della spira sopra l' orizzonte diventa massima o minima. Questi punti generalmente parlando son due. Perchè se $i$ è l' arco che ha per seno $\frac{\text{tang. } \xi}{\text{tang. } E}$, soddisfaranno all' equazione del massimo i due archi seguenti $s = i$, $s = 180° - i$. Il primo di questi archi appartiene al punto $E$ dove l' altezza è massima; il secondo al punto $G$, dove essa è minima.

376. *Coroll. III.* Se la Coclea fosse eretta in guisa che divenisse $\xi = E$, avrebbe $s$ un valor solo $s = \frac{1}{2} \pi$ il qual corrisponde al punto di mezzo della semispira anteriore $AI$. Ma questo valore non indicherebbe nè un massimo, nè un minimo, come dal solito criterio si può facilmente raccogliere. Esso denoterebbe soltanto il punto di flesso di quest' arco dell' elice, il quale infatti è, per metà concavo, e per l' altra metà convesso verso la base.

377. *Coroll. IV.* Se la Coclea fosse anche più eretta, onde divenisse $\xi > E$, ambedue i valori di $s$ diverrebbero immaginarj, e per l' intera spira $AIH$ l' altezza de' suoi punti

sopra l'orizzonte, andrebbe continuamente crescendo.

378. *Proposizione III.* Nella spira $AIH$ determinare l'arco idroforo.

Per il punto $E$ (375) (Fig. 23) a cui corrisponde l'altezza massima sopra l'orizzonte, si conduca il piano orizzontale $Ee$. L'arco $EGe$ inferiore a questo piano sarà desso l'arco idroforo.

Ed infatti è chiaro non potersi in una rivoluzione del cilindro riempir d'acqua se non appunto questa porzione $EGe$; mentre se ve n'entrasse di più, essa sormontando la schiena $E$ ricaderebbe, e tornerebbe ad uscir fuori per l'apertura inferiore.

379. *Corollario.* Per misurar la lunghezza di quest'arco idroforo, fa d'uopo cercare il punto $e$ che sta a livello con $E$. Sia l'arco circolare che a quel punto corrisponde $ABn = \pi + X$, siccome l'arco circolare che corrisponde al punto $E$ è l'arco $AN = i$. Sarà dunque l'altezza del punto $e$ sopra l'orizzonte $TV$ (374)

$$(\pi + X)\ \text{tang.}\ \xi \cos. E + (1 - \cos. X) \sin. E$$

avvertendo essere $\cos. (\pi + X) = -\cos. X$. Egnagliando quest'altezza a quella del punto $E$, la qual è

$$i\ \text{tang.}\ \xi \cos. E + (1 + \cos. i) \sin. E$$

avrò per determinare l'arco $X$ l'equazion trascendente

$$\cos. X - X \frac{\text{tang.}\ \xi}{\text{tang.}\ E} = (\pi - i) \frac{\text{tang.}\ \xi}{\text{tang.}\ E} - \cos. i$$

ovvero

$$\cos. X - X \sin. i = (\pi - i) \sin. i - \cos. i$$

Trovato l'arco $X$ per mezzo di questa equazione, avremo l'arco circolare $N B n$ sotteso all'arco idroforo, che sarà $= \pi + X - i$, E sarà la lunghezza dell'arco idroforo stesso $E G e$ (372) $= (\pi + X - i) \sec. \xi$.

380. *Proposizione IV.* Determinare la portata della Coclea.

La lunghezza dell'arco idroforo determina la portata della Coclea. Poichè a ciascun giro tant'acqua si scarica dalla bocca superiore quanta capè in un arco idroforo. Misurando adunque la lunghezza di quest'arco, come pocanzi si è insegnato, e poi moltiplicandola per la sezione del tubo, avremo la quantità dell'acqua versata dalla Coclea in ogni sua rivoluzione.

381. *Coroll. I.* Se $\xi > E$, diventa $i$ immaginario (377), e non v'è più nè arco idroforo nè portata. Quindi è condizione essenziale alla Coclea, che l'angolo della sua declinazione dalla verticale sia maggiore che non è l'angolo dell'inclinazione della spira alla base.

382. *Coroll. II.* E quanto più $\xi$ sarà picciolo in paragone di $E$, tanto minore sarà l'arco $i$, e tanto più esteso e capace riu-

scirà l'arco idroforo. Gioverà dunque voltar le spire ristrette quanto più si può. E dovrà il cilindro inclinarsi verso l'orizzonte quanto più il permette l'altezza a cui vuol portarsi l'acqua, e la robustezza della macchina, che più inclinata, più soffre.

383. *Coroll. III.* Perchè poi la Coclea possa fornire tutta quella portata della quale è capace, si dovrà sommergere la base del cilindro nell'acqua così che il pelo dell'acqua tocchi il punto $N$ principio dell'arco $NBn$ sotteso all'arco idroforo. Profondarla di più sarebbe inutile, perchè già non s'empie d'acqua se non che l'arco idroforo $EGe$. Tenerla più sollevata nuocerebbe, poichè quell'arco non s'empirebbe del tutto.

Adunque l'arco sporgente fuori dell'acqua dovrà essere di gradi $2i$, e la sua corda $= 2 \sin. i = \frac{2 \operatorname{tang.} \xi}{\operatorname{tang.} E}$.

384. *Esempio I.* Secondo la costruzion della Coclea prescritta da Vitruvio sarebbe l'angolo $\xi$ semiretto, e l'angolo $E = 53° 8'$. Di qui si trova (375) l'arco $i = \text{Arc. Sin.} \frac{\operatorname{tang.} \xi}{\operatorname{tang.} E} = 48° 35'$, che ci determina il punto $N$. Poscia dall'equazione in $X$ (379) per via delle false posizioni si cercherà l'arco $X$, che ci determina il punto $n$. Si troverà prossima-

mente $X = -4° 30'$ onde si conchiude che il punto $n$ cade nel semicircolo $ANB$, e l'arco $Nn$ sotteso all'arco idroforo; e di gradi 126° 55'. Starà dunque la lunghezza dell'arco idroforo all'intera spira come sta 126° 55' a 360°; onde se $L$ sia la lunghezza dell'intera spira, sarà l'arco idroforo $= 0,35 L$. È poi (372) $L = 2\pi$ sec. $45° = 8,89$. Dunque l'arco idroforo $= 3,11$. Quindi preso per unità di misura il raggio della base, se la sezione del tubo spirale si moltiplica per 3,11 si avrà la quantità d'acqua che ad ogni giro scaturisce dalla sommità di questa Coclea.

385. *Esempio II.* Daniello Bernulli consiglia le determinazioni seguenti $\xi = 5°$, $E = 30°$. Allora sarebbe $i = 8° 43'$, ed $X = 104° 57'$. L'arco $NBn$ sotteso all'arco idroforo comprenderebbe 276° 14', e la lunghezza dell'arco medesimo idroforo sarebbe $= 0,77 L$. Si empirebbero dunque ad ogni giro tre quarti e più di ciascuna spira, mentre nell'esempio precedente non se ne riempiva che un terzo o poco più. Se non che la spira è più corta che non era, riuscendo $L = 2\pi$ sec. $5° = 6,31$. E dunque l'assoluta lunghezza dell'arco idroforo $= 4,87$, che moltiplicata per la sezione del tubo ci darà la portata.

Pertanto se sia eguale la base, ed eguale la sezione del tubo spirale, sta la portata

della Coclea Vitruviana alla portata della Coclea di Bernulli nel rapporto di 3,11 a 4,87. Che se Bernulli (a) stimò l'effetto della sua Coclea due volte e un terzo maggiore di quello della Coclea di Vitruvio, convien dire che egli non ponesse mente alla diversa lunghezza delle spire nelle due Coclee.

386. *Proposizione V.* Determinare la potenza richiesta ad aggirare con moto equabile la Coclea piena.

Questa dev' essere tanta (prescindendo dagli attriti) quanta si ricerca per tenere essa Coclea piena in equilibrio (I. 599). Or dicasi $P$ il peso dell'acqua che cape nell'arco idroforo $ECe$. Questo peso che può intendersi raccolto nel punto infimo $G$, tende all'ingiù verticalmente, e risolvendo il suo sforzo in due, l'uno secondo il lato $GK$ del cilindro, l'altro secondo $GQ$ perpendicolare ad esso lato, quest' ultimo sforzo che è il solo che contrasti colla potenza, sarà $= P \sin. E$. Ora se per $K$ si conduce $Kq$ parallela a $GQ$, si fa palese che la distanza della direzione della forza $GQ$ dall' asse del cilindro viene ad essere eguale all'ordinata $KL$ spettante al punto $G$. È poi questa ordinata $KL = \sin. AK = (375) \sin. (\pi - i) =$

(a) *Hydr.* pag. 189.

sin. $i$. Dunque il momento del peso dell' acqua $EG$ e per rivolgere in contrario il cilindro, sarà $= P$ sin. $i$ sin. $E = P$ tang. $\xi$ cos. $E$. E perchè quando la Coclea è piena, tanti sono gli archi idrofori quante le spire, ed il numero delle spire è uguale alla lunghezza dell' asse divisa per $2\pi$ tang. $\xi$, se chiameremo $A$ la lunghezza dell' asse, sarà la somma di questi momenti $= \frac{A}{2\pi \text{ tang.} \xi} \cdot P \text{ tang.} \xi \cos. E$,

o sia $\frac{A P \cos. E}{2\pi}$.

Dall' altra parte sia $F$ la potenza richiesta, ed agisca normalmente al termine d' un vette o manubrio di lunghezza $= a$. Sarà $Fa$ il suo momento. E sia per l' equilibrio, sia pel moto equabile dovrà essere

$$F = \frac{A P \cos. E}{2\pi a}$$

387. *Esempio*. Paragoniamo per modo d'esempio le potenze che si ricercano per muovere la Coclea di Vitruvio, e quella proposta dal Bernulli, supposta pari in entrambe la lunghezza dell' asse, la sezione del tubo, e il braccio del vette. Troverassi essere la prima alla seconda come 19 a 42 a un di presso. Ed oltre a ciò, sarà anche maggiore il dispendio della forza nella Coclea Bernulliana per motivo degli attriti che deb-

non esser maggiori nella Coclea più carica.

## CAP. III.

### *Del Ventilatore Idraulico, o Tromba Napoleone.*

388. Appartiene questa macchina alla classe delle Trombe aspiranti insieme e prementi, in ciò solo diversa dalle comuni Trombe, che l' acqua viene alternativamente aspirata e premuta non già da uno stantuffo che verticalmente si muove in su ed in giù, ma da una paletta, che muovesi circolarmente in qua e in là, descrivendo ad ogni volta un mezzo cerchio. La più comoda applicazione della potenza, il picciol volume della macchina, la maggior facilità di ottenere un perfetto combaciamento fra le parti, sono i principali vantaggi di questa Tromba. L' invenzione è molto semplice ed ingegnosa, come apparirà dalla succinta descrizione che ne daremo (*a*).

389. Rappresenta la Fig. 24 la sezion trasversale d' un cilindro vuoto destinato a ricever l' acqua che vi entra per aspirazione dal tubo sottoposto passando per la valvola

(a) *Tromba Napoleone. Milano. Stamp. Reale.* 1808.

*E*, e ne vien cacciata per pressione passando nel tubo superiore per la valvola *F*. È la superficie del cilindro circondata in questa sezione da un tubo che gli si avvolge attorno, e questo tubo dalla parte *S* è aperto in ambi i suoi termini, e permeabile all' acqua. La cavità del cilindro è attraversata dall' asse *I*, e divisa da due cunei *OIL*, *QIM* forati obbliquamente come si vede in *Q* ed in *O* per dar passaggio all' acqua. Sono questi cunei stabilmente fermati nella superficie concava: dall' altra parte non fanno che appoggiarsi all' asse *I* senza essere col medesimo connessi.

390. Sporge l' asse fuor del cilindro da ambi i lati, e porta da un lato un vette, o doppio manubrio, col quale si aggira circolarmente. Girando l' asse, gira con esso il Ventilatore, o doppia paletta *VV* impiantata sul detto asse, portandosi alternativamente a toccare i lati *IL*, *IM*, ed i lati *IO*, *IQ*.

391. Oltre le due valvole *E* ed *F* ve ne sono altre due affatto simili ed appartenenti agli stessi tubi, poste in un altra Sezion trasversale del cilindro parallela a quella, che vien rappresentata dalla figura, e poco da essa distante. Quest' altra sezione non differisce dalla prima se non in questo, che i tagli de' cunei sono posti al contrario, es-

sendo tagliato il cuneo inferiore dalla parte *M*, ed il superiore dalla parte *L*.

392. Essendo la macchina così disposta, non è difficile intendere come essa operi. Sia da principio il Ventilatore a contatto de' lati *L I M*, poi, girando il manubrio, si porti a contatto degli altri due lati *Q I O*. Egli è manifesto che mediante questo movimento verrà ad espellersi l'aria dalla cavità del cilindro, la quale dalla parte *B* uscendo pel foro *O*, e dalla parte *A* pel foro *Q* ed indi pel condotto *S* accorrerà alla valvola *F* e per essa si sfogherà. Al diradamento dell'aria sovrapposta alla valvola *E* conseguirà l'elevazione dell'acqua nel tubo aspirante. Ora si giri di nuovo il Ventilatore e dalla positura *Q I O* ritorni alla positura *L I M*. Il vuoto che egli lascia dietro di se, accrescerà l'aspirazione dell'acqua, che passando per *E* occuperà tutta la cavità del cilindro, portandosi pel foro *Q* a riempiere la capacità *A*, e pel condotto *S* e pel foro *O* a riempiere la capacità *B*.

393. Torni a girarsi il manubrio, e il Ventilatore si riconduca in *Q I O*. La valvola *E* rimarrà chiusa, e tutta l'acqua sarà spremuta fuori dal cilindro per l'altra valvola *F*, accorrendovi immediatamente pel foro *O* quella che riempieva la parte *B*, e pel foro *Q* e pel condotto *S* quella che riempieva la parte *A*.

Nella seguente conversion del manubrio, la valvola *F* resterà chiusa, e l'acqua già uscita fuor del cilindro non potrà più rientrarvi. Ben s'aprirà la valvola *E*, ed una nuova aspirazione tornerà a riempir d'acqua il cilindro, e nel giro seguente una nuova pressione tornerà a votarlo.

394. Così se vi fossero solamente le due valvole *E* ed *F*, ad ogni giro del manubrio seguirebbe alternativamente l'aspirazione dell'acqua dal tubo sottoposto, e la sua elevazione nel tubo superiore. Ma essendovi associate due altre valvole compagne come sopra si è detto (391) questi due effetti si avranno congiuntamente. Poichè mentre il Ventilatore passando da *QIO* in *LIM* aspira nuova acqua per *E*, è chiaro che collo stesso movimento egli spinge anche fuori una parte dell'acqua pei fori de' cunei aperti nella sezione prossima, e rispondenti ai punti *L*, *M*; e quest' acqua uscirà per la valvola compagna della *F*. E viceversa, mentre tornando da *LIM* in *QIO* spreme fuori l'acqua dal cilindro per *F*, collo stesso movimento esso attrae nuov'acqua, la quale avrà passaggio per la valvola compagna della *E*. In tal guisa a ciascun giro del manubrio si empirà d'acqua una metà del cilindro, e l'altra metà si vuoterà passando senza interruzione nel tubo sovrapposto.

395. Il Sig. Canonico Castelli inventore della macchina ha sperimentato, che con un cilindro della lunghezza di metri 0, 198, e del diametro di m. 0, 149 si ottiene comodamente la portata di metri cubici 0, 2266 per ogni minuto primo; prodotto, com' egli dice, assai maggiore di quello che si ha dalle comuni Trombe così per gli usi domestici, come pel bisogno degl' incendj. Del resto il calcolo per questa macchina è lo stesso che per la Tromba aspirante e premente ordinaria (II. 526. 527). La resistenza al movimento dev' esser maggiore in grazia delle angustie de' fori, e della tortuosità del condotto *S*; ma i vantaggi accennati da principio (388) compensano forse abbastanza questo difetto.

# TAVOLA

*Di alcuni numeri di frequente uso ne' calcoli della Meccanica.*

## I.

Delle forze acceleratrici quella che occorre più spesso è la gravità $g$; e ad essa come a misura comune si riferiscono le altre. Ora essendo 1'' l' unità de' tempi, ed il metro l' unità degli spazj, abbiamo nelle latitudini medie (I. 199)

$$g = 9,8087952$$
$$\log. g = 0,9916157$$
$$\text{compl. log. } g = 9,0083843$$

$$2g = 19,6175904$$
$$\log. 2g = 1,2926457$$
$$\text{compl. log. } 2g = 8,7073543$$

Che se prendiamo per unità degli spazj il piede di Parigi, sarà

$$g = 30,1957875$$
$$\log. g = 1,4799465$$
$$\text{compl. log. } g = 8,5200535$$

$$2g = 60,3915750$$
$$\log. 2g = 1,7809765$$
$$\text{compl. log. } 2g = 8,2190235$$

E prendendo per unità il pollice di Pari-

gi sarebbe

$$g = 362,3494499$$
$$\log. g = 2,5591277$$
$$\text{compl. log. } g = 7,4408723$$
$$2g = 724,6988998$$
$$\log. 2g = 2,8601577$$
$$\text{compl. log. } 2g = 7,1398423$$

Si sono notati questi ultimi valori pel comodo di riscontrare le sperienze e calcoli che si trovano nella più parte de' libri di Meccanica e d'Idraulica, quando il sistema metrico non era per anche introdotto, e si solevano riferir le misure al piede o al pollice Parigino.

II.

Nel calcolare i movimenti de' corpi che fanno vibrazioni isocrone, si ricerca la lunghezza del pendolo semplice sincrono al corpo vibrante. E questa lunghezza per lo più si confronta con quella del pendolo che batte i secondi; mentre così agevolmente si trova (I. 247) il tempo di ciascuna vibrazione, e il numero delle vibrazioni fatte in un dato tempo. Ora se la lunghezza del pendolo a secondi dicasi $l$, abbiamo per le latitudini medie, preso il metro per unità (I. 329)

$$l = 0,9938387$$
$$\log. l = 9,9973160$$
$$\text{compl. log. } l = 0,0026840$$

In piedi di Parigi sarebbe $l = 3,0594340$.

III.

Chiamando $\pi$ il rapporto della periferia al diametro, o della semiperiferia al raggio, abbiamo

$$\pi = 3,1415926$$
$$\log.\ \pi = 0,4971499$$
$$\text{compl. log. } \pi = 9,5028501$$

$$2\pi = 6,2831852$$
$$\log.\ 2\pi = 0,7981799$$
$$\text{compl. log. } 2\pi = 9,2018201$$

IV.

Spesso occorre il bisogno di convertire i logaritmi iperbolici in logaritmi comuni, o viceversa.

Nel sistema de' logaritmi iperbolici il modulo è $= 1$, e la base $e = 2,7182818$.

Nel sistema de' logaritmi comuni il modulo è $m = 0,4342945$, e la base $= 10$.

I logaritmi iperbolici si convertono in logaritmi comuni col moltiplicarli per $m$; e viceversa i logaritmi comuni si cangiano negl' iperbolici col dividerli per $m$. Per comodo di queste trasformazioni noteremo i seguenti valori

$$m = 0,4342945\ ; \quad \frac{1}{m} = 2,3025851$$

$$\log.\ m = 9,6377843\ ; \quad \log.\ \frac{1}{m} = 0,3622157$$

# TAVOLA

**Delle velocità, e delle altezze ad esse dovute; le une e le altre espresse in metri (I. 201)**

| Velocità | Altezze | Velocità | Altezze |
|---|---|---|---|
| 0,10 | 0,0005 | | |
| 0,11 | 6 | 0,41 | 0,0086 |
| 0,12 | 7 | 0,42 | 90 |
| 0,13 | 9 | 0,43 | 94 |
| 0,14 | 0,0010 | 0,44 | 99 |
| 0,15 | 11 | 0,45 | 0,0103 |
| 0,16 | 0,0013 | 0,46 | 0,0108 |
| 0,17 | 15 | 0,47 | 13 |
| 0,18 | 16 | 0,48 | 17 |
| 0,19 | 18 | 0,49 | 22 |
| 0,20 | 20 | 0,50 | 27 |
| 0,21 | 0,0022 | 0,51 | 0,0133 |
| 0,22 | 25 | 0,52 | 38 |
| 0,23 | 27 | 0,53 | 43 |
| 0,24 | 29 | 0,54 | 49 |
| 0,25 | 32 | 0,55 | 54 |
| 0,26 | 0,0034 | 0,56 | 0,0160 |
| 0,27 | 37 | 0,57 | 66 |
| 0,28 | 40 | 0,58 | 72 |
| 0,29 | 43 | 0,59 | 77 |
| 0,30 | 46 | 0,60 | 84 |
| 0,31 | 0,0049 | 0,61 | 0,0190 |
| 0,32 | 52 | 0,62 | 96 |
| 0,33 | 55 | 0,63 | 0,0202 |
| 0,34 | 59 | 0,64 | 09 |
| 0,35 | 62 | 0,65 | 15 |
| 0,36 | 0,0066 | 0,66 | 0,0222 |
| 0,37 | 70 | 0,67 | 29 |
| 0,38 | 74 | 0,68 | 36 |
| 0,39 | 78 | 0,69 | 43 |
| 0,40 | 82 | 0,70 | 50 |

| Velocità | Altezze | Velocità | Altezze |
|---|---|---|---|
| 0,71 | 0,0257 | 1,06 | 0,0573 |
| 0,72 | 64 | 1,07 | 84 |
| 0,73 | 72 | 1,08 | 95 |
| 0,74 | 79 | 1,09 | 0,0606 |
| 0,75 | 87 | 1,10 | 17 |
| 0,76 | 0,0295 | 1,11 | 0,0628 |
| 0,77 | 0,0302 | 1,12 | 39 |
| 0,78 | 10 | 1,13 | 51 |
| 0,79 | 18 | 1,14 | 62 |
| 0,80 | 26 | 1,15 | 74 |
| 0,81 | 0,0335 | 1,16 | 0,0686 |
| 0,82 | 43 | 1,17 | 98 |
| 0,83 | 51 | 1,18 | 0,0710 |
| 0,84 | 60 | 1,19 | 22 |
| 0,85 | 68 | 1,20 | 34 |
| 0,86 | 0,0377 | 1,21 | 0,0746 |
| 0,87 | 86 | 1,22 | 59 |
| 0,88 | 95 | 1,23 | 71 |
| 0,89 | 0,0404 | 1,24 | 84 |
| 0,90 | 13 | 1,25 | 96 |
| 0,91 | 0,0422 | 1,26 | 0,0809 |
| 0,92 | 32 | 1,27 | 22 |
| 0,93 | 41 | 1,28 | 35 |
| 0,94 | 51 | 1,29 | 48 |
| 0,95 | 60 | 1,30 | 62 |
| 0,96 | 0,0470 | 1,31 | 0,0875 |
| 0,97 | 80 | 1,32 | 88 |
| 0,98 | 90 | 1,33 | 0,0902 |
| 0,99 | 0,0500 | 1,34 | 15 |
| 1,00 | 10 | 1,35 | 29 |
| 1,01 | 0,0520 | 1,36 | 0,0943 |
| 1,02 | 30 | 1,37 | 57 |
| 1,03 | 41 | 1,38 | 71 |
| 1,04 | 51 | 1,39 | 85 |
| 1,05 | 62 | 1,40 | 99 |

| Velocità | Altezze | Velocità | Altezze |
|---|---|---|---|
| 1,41 | 0,1014 | 1,76 | 0,1579 |
| 1,42 | 28 | 1,77 | 597 |
| 1,43 | 43 | 1,78 | 615 |
| 1,44 | 57 | 1,79 | 633 |
| 1,45 | 72 | 1,80 | 652 |
| 1,46 | 0,1087 | 1,81 | 0,1670 |
| 1,47 | 0,1102 | 1,82 | 688 |
| 1,48 | 17 | 1,83 | 707 |
| 1,49 | 32 | 1,84 | 726 |
| 1,50 | 47 | 1,85 | 745 |
| 1,51 | 0,1162 | 1,86 | 0,1763 |
| 1,52 | 78 | 1,87 | 782 |
| 1,53 | 93 | 1,88 | 802 |
| 1,54 | 0,1209 | 1,89 | 821 |
| 1,55 | 25 | 1,90 | 840 |
| 1,56 | 0,1240 | 1,91 | 0,1860 |
| 1,57 | 56 | 1,92 | 880 |
| 1,58 | 72 | 1,93 | 899 |
| 1,59 | 89 | 1,94 | 919 |
| 1,60 | 0,1305 | 1,95 | 938 |
| 1,61 | 0,1321 | 1,96 | 0,1958 |
| 1,62 | 38 | 1,97 | 978 |
| 1,63 | 54 | 1,98 | 998 |
| 1,64 | 71 | 1,99 | 0,2019 |
| 1,65 | 88 | 2,00 | 039 |
| 1,66 | 0,1405 | 2,01 | 0,2059 |
| 1,67 | 22 | 2,02 | 080 |
| 1,68 | 39 | 2,03 | 101 |
| 1,69 | 56 | 2,04 | 121 |
| 1,70 | 73 | 2,05 | 142 |
| 1,71 | 0,1490 | 2,06 | 0,2163 |
| 1,72 | 0,1508 | 2,07 | 184 |
| 1,73 | 26 | 2,08 | 205 |
| 1,74 | 43 | 2,09 | 227 |
| 1,75 | 61 | 2,10 | 248 |

| Velocità | Altezze | Velocità | Altezze |
|---|---|---|---|
| 2,11 | 0,2269 | 2,46 | 0,3085 |
| 2,12 | 291 | 2,47 | 110 |
| 2,13 | 313 | 2,48 | 135 |
| 2,14 | 334 | 2,49 | 160 |
| 2,15 | 356 | 2,50 | 186 |
| 2,16 | 0,2378 | 2,51 | 0,3211 |
| 2,17 | 400 | 2,52 | 237 |
| 2,18 | 422 | 2,53 | 263 |
| 2,19 | 445 | 2,54 | 289 |
| 2,20 | 467 | 2,55 | 315 |
| 2,21 | 0,2490 | 2,56 | 0,3341 |
| 2,22 | 512 | 2,57 | 367 |
| 2,23 | 535 | 2,58 | 393 |
| 2,24 | 558 | 2,59 | 419 |
| 2,25 | 581 | 2,60 | 446 |
| 2,26 | 0,2604 | 2,61 | 0,3472 |
| 2,27 | 627 | 2,62 | 499 |
| 2,28 | 650 | 2,63 | 526 |
| 2,29 | 673 | 2,64 | 553 |
| 2,30 | 697 | 2,65 | 580 |
| 2,31 | 0,2720 | 2,66 | 0,3607 |
| 2,32 | 744 | 2,67 | 634 |
| 2,33 | 767 | 2,68 | 661 |
| 2,34 | 791 | 2,69 | 689 |
| 2,35 | 815 | 2,70 | 716 |
| 2,36 | 0,2839 | 2,71 | 0,3744 |
| 2,37 | 863 | 2,72 | 771 |
| 2,38 | 887 | 2,73 | 799 |
| 2,39 | 912 | 2,74 | 827 |
| 2,40 | 936 | 2,75 | 855 |
| 2,41 | 0,2961 | 2,76 | 0,3883 |
| 2,42 | 985 | 2,77 | 911 |
| 2,43 | 0,3010 | 2,78 | 939 |
| 2,44 | 035 | 2,79 | 968 |
| 2,45 | 060 | 2,80 | 996 |

| Velocità | Altezze | Velocità | Altezze |
|---|---|---|---|
| 2,81 | 0,4025 | 2,91 | 0,4317 |
| 2,82 | 054 | 2,92 | 346 |
| 2,83 | 083 | 2,93 | 376 |
| 2,84 | 111 | 2,94 | 406 |
| 2,85 | 140 | 2,95 | 436 |
| 2,86 | 0,4169 | 2,96 | 0,4466 |
| 2,87 | 199 | 2,97 | 496 |
| 2,88 | 228 | 2,98 | 527 |
| 2,89 | 257 | 2,99 | 557 |
| 2,90 | 287 | 3,00 | 588 |

| Altezze | Velocità | Altezze | Velocità |
|---|---|---|---|
| 0,005 | 0,3132 | 0,105 | 1,4352 |
| 10 | 4429 | 10 | 4690 |
| 15 | 5425 | 15 | 5020 |
| 20 | 6264 | 20 | 5343 |
| 25 | 7003 | 25 | 5641 |
| 0,030 | 0,7672 | 0,130 | 1,5970 |
| 35 | 8286 | 35 | 6274 |
| 40 | 8858 | 40 | 6572 |
| 45 | 9396 | 45 | 6866 |
| 50 | 9904 | 50 | 7154 |
| 0,055 | 1,0387 | 0,155 | 1,7438 |
| 60 | 0849 | 60 | 7717 |
| 65 | 1292 | 65 | 7868 |
| 70 | 1718 | 70 | 8262 |
| 75 | 2130 | 75 | 8529 |
| 0,080 | 1,2527 | 0,180 | 1,8791 |
| 85 | 2913 | 85 | 9051 |
| 90 | 3288 | 90 | 9306 |
| 95 | 3652 | 95 | 9559 |
| 0,100 | 4006 | 0,200 | 9808 |

| Altezze | Velocità | Altezze | Velocità |
|---|---|---|---|
| 0,205 | 2,0054 | 0,355 | 2,6390 |
| 10 | 0296 | 60 | 6575 |
| 15 | 0537 | 65 | 6759 |
| 20 | 0774 | 70 | 6942 |
| 25 | 1009 | 75 | 7123 |
| 0,230 | 2,1241 | 0,380 | 2,7303 |
| 35 | 1471 | 85 | 7482 |
| 40 | 1698 | 90 | 7660 |
| 45 | 1923 | 95 | 7837 |
| 50 | 2146 | 0,400 | 8013 |
| 0,255 | 2,2366 | 0,405 | 2,8187 |
| 60 | 2584 | 10 | 8360 |
| 65 | 2801 | 15 | 8533 |
| 70 | 3014 | 20 | 8704 |
| 75 | 3227 | 25 | 8875 |
| 0,280 | 2,3437 | 0,430 | 2,9044 |
| 85 | 3645 | 35 | 9212 |
| 90 | 3852 | 40 | 9380 |
| 95 | 4056 | 45 | 9546 |
| 0,300 | 4260 | 50 | 9712 |
| 0,305 | 2,4461 | 0,455 | 2,9876 |
| 10 | 4660 | 60 | 3,0040 |
| 15 | 4859 | 65 | 0203 |
| 20 | 5057 | 70 | 0365 |
| 25 | 5250 | 75 | 0526 |
| 0,330 | 2,5444 | 0,480 | 3,0686 |
| 35 | 5636 | 85 | 0846 |
| 40 | 5826 | 90 | 1004 |
| 45 | 6015 | 95 | 1162 |
| 50 | 6203 | 0,500 | 1319 |

# TAVOLA

*Delle misure lineari di diversi paesi, espresse in metri; e viceversa.*

Del Regno d'Italia.

| | Piede espresso in metri | Metro espresso in piedi |
|---|---|---|
| Ancona . . . . . . | 0,4096 | 2,4416 |
| Bergamo . . . . . | 0,4378 | 2,2843 |
| Bologna . . . . . | 0,3801 | 2,6309 |
| Brescia . . . . . | 0,4710 | 2,1232 |
| Como . . . . . . | 0,4512 | 2,2162 |
| Cremona . . . . . | 0,4835 | 2,0681 |
| Fermo . . . . . . | 0,4245 | 2,3559 |
| Ferrara . . . . . | 0,4039 | 2,4761 |
| Forlì . . . . . . | 0,4882 | 2,0483 |
| Macerata . . . . . | 0,5585 | 1,7905 |
| Mantova . . . . . | 0,4669 | 2,1420 |
| Milano *Braccio* . . | 0,5949 | 1,6808 |
| *Piede* . . | 0,4352 | 2,2979 |
| Modena . . . . . | 0,5230 | 1,9119 |
| Novara . . . . . | 0,4709 | 2,1234 |
| Padova, e Vicenza . | 0,3574 | 2,7980 |
| Reggio . . . . . | 0,5309 | 1,8836 |
| Sondrio . . . . . | 0,4462 | 2,2411 |
| Treviso . . . . . | 0,4081 | 2,4503 |
| Udine . . . . . | 0,3405 | 2,9369 |

| | | Piede espresso in metri | Metro espresso in piedi |
|---|---|---|---|
| Venezia e Belluno | . . | 0,3477 | 2,8758 |
| Verona | . . . . . . | 0,3429 | 2,9162 |

ESTERE.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Firenze | *Braccio* . . | 0,5830 | 1,7152 |
| Genova | *Palmo* . . | 0,2491 | 4,0145 |
| Londra | . . . . . | 0,3048 | 3,2809 |
| Napoli | *Palmo* . . | 0,2620 | 3,8166 |
| Parigi | . . . . . | 0,3248 | 3,0784 |
| Piede del Reno | . . | 0,3138 | 3,1869 |
| Roma | *Palmo* . . | 0,2234 | 4,4762 |
| | *Piede antico* | 0,2953 | 3,3865 |
| Torino | *Piede* . . | 0,5137 | 1,9467 |

# TAVOLA

*De' Pesi espressi in Chilogrammi, o libbre Italiane; e viceversa.*

Del Regno d' Italia.

| | Libbra espressa in Chilogrami | Chilogramo espresso in Libbre |
|---|---|---|
| Ancona . . . . . . . | 0,3296 | 3,0341 |
| Bergamo . . . . . . . | 0,3251 | 3,0757 |
| Bologna . . . . . . . | 0,3619 | 2,7636 |
| Brescia . . . . . . . | 0,3208 | 3,1171 |
| Como . . . . . . . | 0,3167 | 3,1579 |
| Cremona . . . . . . . | 0,3095 | 3,2311 |
| Fermo . . . . . . . | 0,3210 | 3,1155 |
| Ferrara . . . . . . . | 0,3451 | 2,8974 |
| Forlì . . . . . . . | 0,3294 | 3,0354 |
| Macerata; *come Firenze e Roma* . . . . . . . . | . . . . | . . . . |
| Mantova . . . . . . . | 0,3105 | 3,2203 |
| Milano . . . . . . . | 0,3268 | 3,0600 |
| Modena . . . . . . . | 0,3405 | 2,9372 |
| Novara . . . . . . . | 0,3255 | 3,0724 |
| Padova e Vicenza. *Libbra sottile* . . . | 0,3389 | 2,9509 |
| *Libbra grossa* | 0,4865 | 2,0553 |
| Reggio . . . . . . . | 0,3245 | 3,0814 |

| | | Libbra espressa in Chilogrami | Chilogramo espresso in Libbre |
|---|---|---|---|
| Sondrio | *Libbra di* 30 *Once* . . . . | 0,7979 | 1,2533 |
| Treviso | *Libbra sottile, come Padova* | . . . . | . . . . |
| | *Libbra grossa* | 0,5167 | 1,9352 |
| Venezia | e Udine. *Libbra sottile* . . | 0,3012 | 3,3197 |
| | *Libbra grossa* | 0,4770 | 2,0964 |
| Verona | *Libbra sottile* | 0,3332 | 3,0014 |
| | *Libbra grossa* | 0,4998 | 2,0009 |

## ESTERI.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Amsterdam . . . . . | | 0,4830 | 2,0703 |
| Firenze e Roma . . . | | 0,3393 | 3,9469 |
| Genova . . . . . . | | 0,3168 | 3,1568 |
| Londra | *Libbra d.* Troys *di* 12 *Once* . | 0,3731 | 2,6800 |
| | *Libbra d.* Avoirdupoids *di* 16 *Once* . . . . | 0,4536 | 2,2045 |
| Napoli | . . . . . . | 0,3208 | 3,1176 |
| Parigi | . . . . . . | 0,4895 | 2,0429 |
| Torino | . . . . . . | 0,3688 | 2,7112 |

*Fine del Terzo ed Ultimo Volume.*

# INDICE

# CORREZIONI

## DEL VOLUME SECONDO.

| pag. | lin. | | leggi |
|---|---|---|---|
| 48 | 1 | $f$ | $f^2$ |
| 50 | 6 | $\frac{f^2}{m}$ | $\frac{f^2}{m^2}$ |
| 54 | 16 | $\frac{-af}{y^2}$ | $\frac{-af^2}{y^2}$ |
| 55 | 5 | $\frac{af}{y^2}$ | $\frac{af^2}{y^2}$ |
| 68 | ult. | $(k-1)\frac{f^2c^2}{m^2}$ | $(k-1)\frac{f^2c^2}{g\,m^2}$ |
| 69 | 2 | *lo stesso.* | |
| 128 | 27 | 234 | 271 |
| 135 | 1 | ume | fiume |
| 188 | 23 | res enza | resistenza |

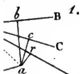
# CORREZIONI

## DEL VOLUME TERZO.

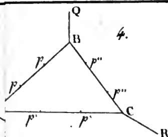
| pag. | lin. | | leggi |
|---|---|---|---|
| 5 | 2 | $S'(\beta - \epsilon)$ | $S'\cos.(\beta - \epsilon)$ |
| 12 | 14 | $v''=0,\ v'''=0$ | $v'=0,\ v''=0$ |
| 13 | 19 | della | delle |
| 14 | 19 | $Zf = ZF$ | $Zf = LF$ |
| 74 | 22 | $2Sm(Pdx+Qdy+Rdz)$ leggi $2Sm\int(Pdx+Qdy+Rdz)$ | |
| 75 | 7 | nel principio si aggiunga il segno $=$ | |
| ivi | 26 | $\delta S.mVds=0$ | $\delta S.m\int Vds=0$ |
| 83 | 7 | $\frac{-A^n dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}$ | $\frac{-Ax^n dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}$ |
| 85 | 1 | $\sqrt{(1-x^2)}$ | $\sqrt{(1-X^2)}$ |
| ivi | 8 | $=0$ | $A=0$ |



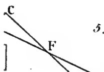
I.



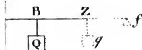
1.
b
B
c
C
r
a

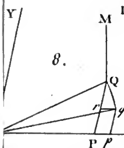
Q
B
4.
p
p
p"
p'''
p'
p'
C
R

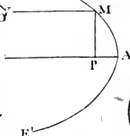
C
F
5.

B
Z
f
Q
q

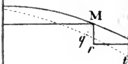
Y
M
D
8.
Q
r
q
P
p

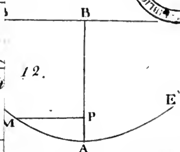
M
A
P
E'



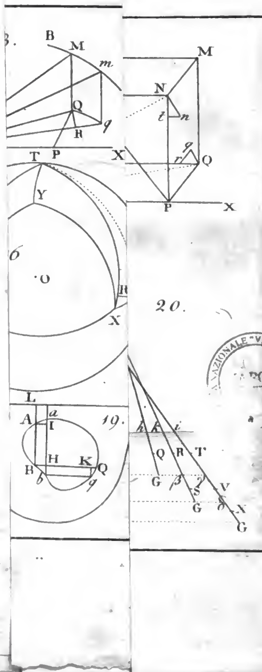


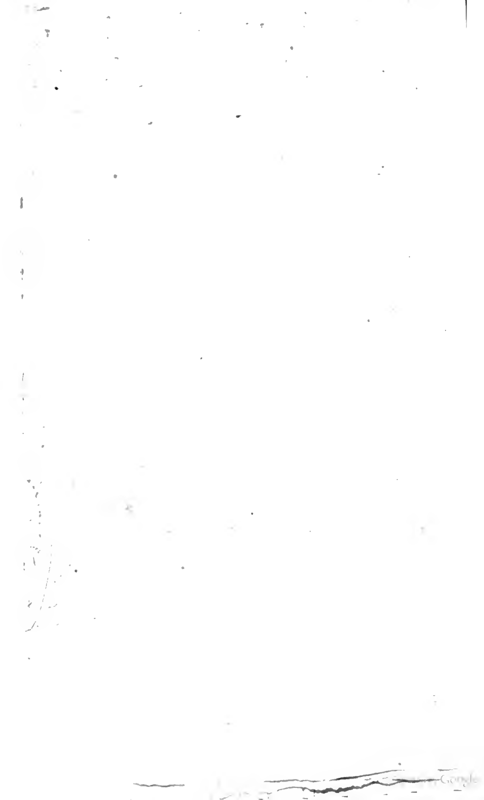


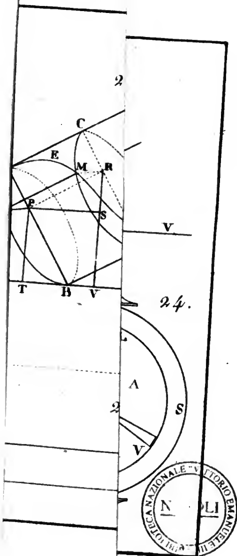
M
q
r
t

B
12.
E'
P
M
A


B
M
m
Q
q
R
P
X
N
t
n
r
T
Y
O
20.
L
a
A
I
19.
H
K
b
h
k
i
G
β
S
γ
V
δ




2
C
E
M
R
P
S
V
T
B
V
24.
A
2
S
V